รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

เรื่อง

การจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปโดย Δ-ไอดีลวิภัชนัย

CHARACTERIZING SEMIGROUPS BY Δ-FUZZY IDEALS

โดย

ยุพร ริมชลการ (หัวหน้าโครงการ) คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
พงษ์พันธ์ จุลทา (ผู้ร่วมวิจัย) คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากมหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม

พ.ศ. 2562

แบบสรุปโครงการวิจัยฉบับสมบูรณ์

---

1. ชื่อโครงการ (ภาษาไทย)..............การจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปโดย Δ-ไอดีลวิภัชนัย
(ภาษาอังกฤษ)..........Characterizing semigroups by Δ-fuzzy ideals

2. ชื่อหัวหน้าโครงการ........นางสาวยุพร ริมชลการ...
....Miss Yuporn Rimcholakarn..
ตำแหน่ง..............หัวหน้าโครงการ...
หน่วยงาน............คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี...
สถานที่ติดต่อ.......คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี...
โทรศัพท์......0-5526-7054......โทรสาร...... 0-5526-7054..
E-mail.... rimcholakarn@yahoo.co.th...
ผู้ร่วมโครงการ............ว่าที่ร้อยตรีพงษ์พันธ์ จุลทา ....
....Acting Sub Lt. Pongpun Julatha..
ตำแหน่ง..................................ผู้ร่วมวิจัย..
หน่วยงาน...........คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี..
สถานที่ติดต่อ.......คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี..
โทรศัพท์.....084-934-5007.....โทรสาร......0-5526-7054...
E-mail..pongpunjulatha@hotmail.com...

3. ระยะเวลาโครงการ....1...ปี ตั้งแต่เดือน มีนาคม พ.ศ. 2561 ถึงเดือน กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2562

4. บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้ คณะผู้วิจัยทำการแนะนำแนวคิด Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัย Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย Δ-ไอดีลภายในวิภัชนัย Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยและ Δ-ไอดีลวิภัชนัยของกึ่งกรุปซึ่งเป็นนัยทั่วไปของ $(\in_\gamma,\in_\gamma \vee q_\delta)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย $(\in_\gamma,\in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย $(\in_\gamma,\in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลขวาวิภัชนัย $(\in_\gamma,\in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย $(\in_\gamma,\in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วิภัชนัย $(\in_\gamma,\in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลภายในวิภัชนัย $(\in_\gamma,\in_\gamma \vee q_\delta)$-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยและ $(\in_\gamma,\in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลวิภัชนัย ตามลำดับ พร้อมกับจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปโดย Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัย Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยและ Δ-ไอดีลวิภัชนัย

Abstract

The purposes of this research are to introduce concepts of Δ-fuzzy subsemigroups, Δ-fuzzy left ideals, Δ-fuzzy right ideals, Δ-fuzzy generalized bi-ideals, Δ-fuzzy bi-ideals, Δ-fuzzy interior ideals, Δ-fuzzy quasi-ideals and Δ-fuzzy ideals of semigroups which are $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy subsemigroups, $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy left ideals, $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy right ideals, $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy generalized bi-ideals, $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy bi-ideals, $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy interior ideals, $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy quasi-ideals and $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy ideals, respectively. We also characterize semigroups by Δ-fuzzy left ideals, Δ-fuzzy right ideals, Δ-fuzzy generalized bi-ideals, Δ-fuzzy bi-ideals, Δ-fuzzy quasi-ideals and Δ-fuzzy ideals.

5. วัตถุประสงค์ของโครงการ

5.1 เพื่อให้ Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัย Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย Δ-ไอดีลภายในวิภัชนัย Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยและ Δ-ไอดีลวิภัชนัยของกึ่งกรุปซึ่งเป็นนัยทั่วไปของ $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลขวาวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลภายในวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยและ Δ-ไอดีลวิภัชนัยตามลำดับ เมื่อกำหนดให้ $\Delta \subseteq [0,1]$ และ $|\Delta| > 1$

5.2 เพื่อจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปโดย Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัย Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยและ Δ-ไอดีลวิภัชนัย

6. เป้าหมายของโครงการ

พัฒนาเซตย่อยวิภัชนัยที่เป็นนัยทั่วไปของ $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย, $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย, $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลขวาวิภัชนัย, $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย, $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วิภัชนัย, $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัย, $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลภายในวิภัชนัย และ $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลวิภัชนัยของกึ่งกรุป และใช้เซตย่อยวิภัชนัยที่ได้จากพัฒนามาเป็นเครื่องมือในการจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุป

7. งบประมาณ

รายละเอียดงบประมาณ	งบประมาณที่ได้รับ (บาท)	งบประมาณที่ใช้จ่าย (บาท)	ยอดคงเหลือ (บาท)
1. งบบุคลากร	0	0	0
2. งบดำเนินงาน	0	0	0
2.1 ค่าตอบแทน	1,530	1,530	0
2.2 ค่าใช้สอย			
-ค่าหนังสือหรือตำรา	5,000	5,000	0
-ค่าลงทะเบียนเข้าร่วมประชุม/สัมมนา	6,000	6,000	0
-ค่าที่พัก	7,400	7,400	0
-ค่าจ้างเหมายานพาหนะเดินทาง	6,000	6,000	0
-น้ำมันเชื้อเพลิง	4,070	4,070	0
-ค่าตีพิมพ์ (Page Charge)	20,000	20,000	0
2.3 ค่าวัสดุ	0	0	0
3. งบลงทุน (ครุภัณฑ์ ถ้ามี)	0	0	0
รวม	50,000	50,000	0

8. ผลงานที่ได้รับจากโครงการนี้

ผลงาน	รายละเอียด
1. รูปแบบผลงานวิจัย ได้แก่ ต้นแบบผลิตภัณฑ์/กระบวนการใหม่/เทคโนโลยีใหม่/องค์ความรู้	
☐ ยังไม่ได้รูปแบบผลงานวิจัยที่ชัดเจน	
☐ ได้รูปแบบผลงานวิจัย ดังนี้ (ระบุรายละเอียดโดยย่อของแต่ละรูปแบบ)	
☐ ต้นแบบผลิตภัณฑ์ .... ☐ กระบวนการใหม่	1.1 เชิงพาณิชย์ (ระบุชื่อบริษัท/องค์กร/สถาบัน และกิจกรรมโดยย่อในการนำเอาผลงานวิจัยไปใช้) ☐ ก. ดำเนินการแล้ว... ☐ ข. อยู่ระหว่างดำเนินการ... ☐ ค. ยังไม่มีการนำผลงานวิจัยไปใช้ประโยชน์เชิงพาณิชย์ ☐ มีแผนที่จะดำเนินการ ในวัน/เดือน/ปี.................

ผลงาน	รายละเอียด
.... ❑ เทคโนโลยีใหม่	หากต้องการให้มหาวิทยาลัยประสานงานกับภาคเอกชน กรุณาแจ้งให้ ทราบด้วย ☐ อื่น ๆ ระบุ..
.... ❑ องค์ความรู้	1.2 เชิงสาธารณะประโยชน์ (ระบุว่าเป็นกรณีที่ 1 และ/หรือกรณีที่ 2) 1.2.1 <u>กรณีที่ 1</u> เป็นการนำผลงานวิจัยถ่ายทอดให้กับหน่วยงานภาครัฐ/ภาคเอกชน/ชุมชน/กลุ่มบุคคลโดยไม่หวังผลกำไร (ให้ระบุชื่อหน่วยงาน/ชุมชน/กลุ่มบุคคลที่รับผลงานวิจัยไปใช้ประโยชน์และกิจกรรมโดยย่อในการนำผลงานวิจัยไปใช้) 1.2.2 <u>กรณีที่ 2</u> เป็นการเผยแพร่ผลงานวิจัยโดยการจัดประชุม/สัมมนา/ฝึกอบรม (ให้ระบุชื่อหัวข้อที่จัด วัน/เดือน/ปีที่จัด และสถานที่ที่จัด) ❑ ก. ดำเนินการแล้ว.. ❑ ข. อยู่ระหว่างดำเนินการ.. ❑ ค. ยังไม่มีการนำเสนอผลงานวิจัยไปใช้เชิงสาธารณะประโยชน์ ❑ มีแผนที่จะดำเนินการ ในวัน/เดือน/ปี.............. หากต้องการให้มหาวิทยาลัยประสานงานกับภาคเอกชน กรุณาแจ้งให้ ทราบด้วย ❑ อื่น ๆ ระบุ.. หมายเหตุ ถ้ารูปแบบผลงานวิจัยมีมากกว่า 1 รูปแบบให้ระบุการนำไปใช้ประโยชน์ในแต่ละรูปแบบ เช่น โครงการ ก. มี 2 รูปแบบคือ 1) ต้นแบบผลิตภัณฑ์ ให้ระบุการนำไปใช้ประโยชน์ทั้ง 2 ประเภท และ 2) เทคโนโลยีใหม่ ให้ระบุการนำไปใช้ประโยชน์ทั้ง 2 ประเภท ด้วย
2. สิทธิบัตร	
❑ 2.1 จดสิทธิบัตรแล้ว	ระบุรูปแบบผลงานวิจัยที่นำไปจด วัน/เดือน/ปีที่ยื่นจด หมายเลขสิทธิบัตร ประเทศที่ยื่นจดสิทธิบัตร

ผลงาน	รายละเอียด	
❑ 2.2 กำลังดำเนินการยื่นขอจดสิทธิบัตร	ระบุรูปแบบผลงานวิจัยที่นำไปจด วัน/เดือน/ปีที่ยื่นจด หมายเลขสิทธิบัตร ประเทศที่ยื่นจดสิทธิบัตร	
❑ 2.3 อยู่ในระหว่างเตรียมคำขอจดสิทธิบัตร	ระบุรูปแบบผลงานวิจัยที่นำไปยื่นจด	
❑ 2.4 ยังไม่จดสิทธิบัตร	❑ ก. ต้องการคำปรึกษาจากเจ้าหน้าที่ด้านจดสิทธิบัตรของมหาวิทยาลัย ❑ อื่น ๆ ระบุ..	
3. การเสนอผลงานวิจัย		
❑ 3.1 ยังไม่มีการนำเสนอผลงานวิจัย		
☑ 3.2 มีการนำเสนอผลงานวิจัยแล้วในรูปแบบ ดังนี้		
3.2.1 บทความทางวิชาการ		
☑ 3.2.1.1 วารสาร (Journal)		สถานภาพ
	❑ ก. ระดับชาติ (ระบุชื่อผู้วิจัยและ/หรือผู้ร่วมวิจัย ปีที่ตีพิมพ์ ชื่อบทความ ชื่อวารสาร ฉบับที่ และเลขหน้าที่พิมพ์)	❑ อยู่ระหว่างการเรียบเรียง/เขียน (In preparation) ❑ ยื่นเอกสารแล้ว อยู่ระหว่างการพิจารณา (Submitted) ❑ ได้รับการตอบรับแล้ว อยู่ระหว่างการจัดพิมพ์ (Accepted, In press) ❑ ได้รับการจัดพิมพ์แล้ว (Published)
	☑ ข. ระดับนานาประเทศ Pongpun Julatha and Yuporn Rimcholakarn (2019) Characterizations of Semigroups by Their	ได้รับการตอบรับแล้ว อยู่ระหว่างการจัดพิมพ์ (Accepted, In press)

ผลงาน	รายละเอียด	
	Generalized $(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-Fuzzy Ideals, *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*	
	Pongpun Julatha and Yuporn Rimcholakarn (2019) Characterizations of Semigroups by Their Generalized $(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-Fuzzy Bi-Ideals	อยู่ระหว่างการเรียบเรียง/เขียน (In preparation)
☐ 3.2.1.2 หนังสือ/คู่มือ/ตำรา	☐ ก. ภาษาไทย (ระบุชื่อผู้เขียน ชื่อหนังสือ ชื่อเรื่อง ชื่อสำนักพิมพ์ และวัน/เดือน/ปีที่พิมพ์)	☐ อยู่ระหว่างการเรียบเรียง/เขียน (In preparation) ☐ ได้รับการจัดพิมพ์แล้ว (Published)
	☐ ข. ภาษาอังกฤษ (ระบุชื่อผู้เขียน ชื่อหนังสือ ชื่อเรื่อง ชื่อสำนักพิมพ์ และวัน/เดือน/ปีที่พิมพ์)	☐ อยู่ระหว่างการเรียบเรียง/เขียน (In preparation) ☐ ได้รับการจัดพิมพ์แล้ว (Published)
☐ 3.2.1.3 เอกสารประกอบการประชุม	☑ ก.ระดับชาติ (ยุพร ริมชลการและ พงษ์พันธ์ จุลทา Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป การประชุมวิชาการนำเสนอผลงานวิจัยระดับชาติ เครือข่ายบัณฑิตศึกษา มหาวิทยาลัยราชภัฏภาคเหนือ ครั้งที่ 18 และลำปางวิจัย ครั้งที่ 4 วันที่ 20/07/2561 ณ มหาวิทยาลัยราชภัฏลำปาง ☑ Proceeding ☐ Book of Abstracts	

ผลงาน	รายละเอียด
	❑ ข.ระดับนานาชาติ (ระบุชื่อผู้วิจัย และ/หรือผู้ร่วมวิจัย ชื่อผลงานที่เสนอ ชื่อการประชุม วัน/เดือน/ปีที่จัด และสถานที่ ❑ Proceeding ❑ Book of Abstracts
3.3 การประชุมวิชาการ	❑ ก. ระดับชาติ (ระบุชื่อผู้วิจัย และ/หรือผู้ร่วมวิจัย ชื่อผลงานที่เสนอ ชื่อการประชุม วัน/เดือน/ปีที่จัด และสถานที่จัด) ❑ บรรยาย ❑ โปสเตอร์
	❑ ข. ระดับนานาชาติ (ระบุชื่อผู้วิจัย และ/หรือผู้ร่วมวิจัย ชื่อผลงานที่เสนอ ชื่อการประชุม วัน/เดือน/ปีที่จัด และสถานที่จัด เมือง ประเทศ) 1. การประชุมในประเทศ ❑ บรรยาย ❑ โปสเตอร์ 2. การประชุมในต่างประเทศ ❑ บรรยาย ❑ โปสเตอร์
4. รางวัล/เกียรติบัตรที่ได้รับจากผลงานวิจัยนี้	
❑ ยังไม่เคยได้รับรางวัล/เกียรติบัตร	
☑ ได้รับรางวัล/เกียรติบัตร ดังนี้	
☑ ในประเทศ	นำเสนอผลงานภาคบรรยายดีเด่น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป การประชุมวิชาการนำเสนอผลงานวิจัยระดับชาติ เครือข่ายบัณฑิตศึกษา มหาวิทยาลัยราชภัฏภาคเหนือ ครั้งที่ 18 และลำปางวิจัย ครั้งที่ 4 วันที่ 20 เดือน กรกฎาคม พ.ศ. 2561
❑ ต่างประเทศ	(ระบุชื่อรางวัล/เกียรติบัตรที่ได้รับ ผลงานที่ทำให้ได้รับรางวัล หน่วยงานที่มอบรางวัล ประเทศ และวัน/เดือน/ปีที่ได้รับ)

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยฉบับนี้ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากมหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2561 คณะผู้วิจัยจึงขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูงต่อการสนับสนุน มา ณ ที่นี้ คณะผู้วิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่าผลการวิจัยนี้จะเป็นประโยชน์แก่บุคลากรทางการศึกษาและผู้สนใจ ตลอดจนจะเป็นประโยชน์ในการนำไปประยุกต์ใช้ต่อไป

ยุพร ริมชลการ
พงษ์พันธ์ จุลทา
มิถุนายน 2562

หัวข้องานวิจัยเรื่อง การจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปโดย Δ-ไอดีลวิภัชนัย

คำสำคัญ กึ่งกรุป เซตวิภัชนัย ไอดีลวิภัชนัยวางนัยทั่วไป Δ-ไอดีลวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลวิภัชนัย

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้ คณะผู้วิจัยทำการแนะนำแนวคิด Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัย Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย Δ-ไอดีลภายในวิภัชนัย Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยและ Δ-ไอดีลวิภัชนัยของกึ่งกรุปซึ่งเป็นนัยทั่วไปของ $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลขวาวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลภายในวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยและ $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลวิภัชนัย ตามลำดับ พร้อมกับจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปโดย Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัย Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยและ Δ-ไอดีลวิภัชนัย

Research Title Characterizing semigroups by Δ-fuzzy ideals

Keywords Semigroups, Fuzzy sets, Generalized fuzzy ideals, Δ-fuzzy ideals, $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy ideals

ABSTRACT

The purposes of this research are to introduce concepts of Δ-fuzzy subsemigroups, Δ-fuzzy left ideals, Δ-fuzzy right ideals, Δ-fuzzy generalized bi-ideals, Δ-fuzzy bi-ideals, Δ-fuzzy interior ideals, Δ-fuzzy quasi-ideals and Δ-fuzzy ideals of semigroups which are $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy subsemigroups, $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy left ideals, $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy right ideals, $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy generalized bi-ideals, $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy bi-ideals, $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy interior ideals, $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy quasi-ideals and $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy ideals, respectively. We also characterize semigroups by Δ-fuzzy left ideals, Δ-fuzzy right ideals, Δ-fuzzy generalized bi-ideals, Δ-fuzzy bi-ideals, Δ-fuzzy quasi-ideals and Δ-fuzzy ideals.

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

ทฤษฎีเซตวิภัชนัย (fuzzy set theory) ได้เข้ามามีบทบาทสำคัญอย่างมากในการศึกษาคณิตศาสตร์สมัยใหม่โดยแนวคิดดังกล่าวได้ริเริ่มขึ้นในปี ค.ศ. 1965 โดย Zadeh [1] ทฤษฎีเซตวิภัชนัยเกิดจากแนวคิดในการต้องการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อตอบปัญหาเกี่ยวกับความต้องการหรือคำสั่งซึ่งคลุมเครือ (vague) อันเป็นผลมาจากความรู้สึกของมนุษย์ซึ่งปัญหาดังกล่าวมักพบได้บ่อยครั้งในการตัดสินใจในชีวิตประจำวันโดยเฉพาะอย่างยิ่งในเชิงเศรษฐศาสตร์ สังคมและการเมือง ทฤษฎีดังกล่าวได้นำไปบูรณาการกับศาสตร์สาขาต่างๆ เช่น หุ่นยนต์ วิทยาการจัดการ วิศวกรรมระบบควบคุม วิทยาการคอมพิวเตอร์ เศรษฐศาสตร์ การวิจัยดำเนินงาน คณิตศาสตร์และสาขาอื่น ๆ การใช้แนวคิดเซตวิภัชนัยในการศึกษาพีชคณิตนั้น ได้ริเริ่มโดย Rosenfeld [2] ซึ่งได้แนะนำแนวคิดกรุปย่อยวิภัชนัย (fuzzy subgroup) ซึ่งเป็นการนำความรู้เซตวิภัชนัยกับทฤษฎีกรุป (group theory) มาผนวกเข้าด้วยกัน พร้อมกับแสดงให้เห็นว่าทฤษฎีบทและโครงสร้างต่างๆ จำนวนมากของกรุปสามารถอธิบายโดยใช้เซตวิภัชนัยได้ จากนั้นงานวิจัยเกี่ยวกับการบูรณาการระหว่างเซตวิภัชนัยกับพีชคณิตได้รับการพัฒนาอย่างแพร่หลาย Kuroki [3-7] ได้บูรณาการความรู้เกี่ยวกับเซตวิภัชนัยกับกึ่งกรุป (semigroup) โดยแนะนำ ไอดีลซ้ายวิภัชนัย (fuzzy left ideal) ไอดีลขวาวิภัชนัย (fuzzy right ideal) ไอดีลคู่วิภัชนัย (fuzzy bi-ideal) ไอดีลคู่วางนัยทั่วไป (fuzzy generalized bi-ideal) และกึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย (fuzzy subsemigroup) ของกึ่งกรุป พร้อมกับใช้โครงสร้างย่อยวิภัชนัยในการจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุป Kim [8] ได้ให้เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับไอดีลซ้ายวิภัชนัย ไอดีลขวาวิภัชนัย ไอดีลภายในวิภัชนัย (fuzzy interior ideal) และไอดีลวิภัชนัยโดยใช้จุดวิภัชนัย (fuzzy point)

Bhakat และ Das [9,10] ได้แนะนำ $(\in,\in\vee q)$-กรุปย่อยวิภัชนัย ($(\in,\in\vee q)$-fuzzy subgroup) ซึ่งเป็นนัยทั่วไปของกรุปย่อยวิภัชนัย จากนั้นเซตย่อยวิภัชนัยชนิด $(\in,\in\vee q)$ ของพีชคณิตได้รับการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง Kazanci และ Yamak [11] ได้แนะนำ $(\in,\in\vee q)$-ไอดีลคู่วิภัชนัย ($(\in,\in\vee q)$-fuzzy bi-ideal) ของกึ่งกรุปซึ่งเป็นนัยทั่วไปของไอดีลคู่วิภัชนัย Shabir, Jun และ Nawaz [12] ได้แนะนำ $(\in,\in\vee q)$-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย ($(\in,\in\vee q)$-fuzzy left ideal) $(\in,\in\vee q)$-ไอดีลขวาวิภัชนัย ($(\in,\in\vee q)$-fuzzy right ideal) $(\in,\in\vee q)$-ไอดีลวิภัชนัย ($(\in,\in\vee q)$-fuzzy ideal)และ $(\in,\in\vee q)$-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัย ($(\in,\in\vee q)$-fuzzy quasi-ideal) ของกึ่งกรุป พร้อมกับใช้เซตย่อยวิภัชนัยเหล่านี้ในการจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปปกติ Jun และ Song [13] ได้ศึกษาคุณสมบัติของ $(\in,\in\vee q)$-ไอดีลภายในวิภัชนัย ($(\in,\in\vee q)$-fuzzy interior ideal) ของกึ่งกรุป

Shabir และ Ali [14] ได้แนะนำ $(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย ($(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-fuzzy subsemigroup), $(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย ($(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-fuzzy left ideal) $(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-ไอดีลขวาวิภัชนัย ($(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-fuzzy right ideal) $(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-ไอดีลคู่วิภัชนัย ($(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-fuzzy bi-ideal) $(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย ($(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-fuzzy generalized bi-ideal) $(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-ไอดีลภายในวิภัชนัย ($(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-fuzzy interior ideal) $(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-ไอดีลวิภัชนัย ($(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-fuzzy ideal) และ $(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัย ($(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-fuzzy quasi-ideal) ของกึ่งกรุป เมื่อกำหนดให้ $\gamma,\delta \in [0,1]$ ซึ่ง $\gamma < \delta$ พร้อมกับจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปปกติ (regular semigroup) กึ่งกรุปปกติภายใน (intra-regular semigroup) และกึ่งกรุปเชิงเดียว (semisimple semigroup) โดยใช้เซตย่อยวิภัชนัยชนิด $(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$ ในส่วนของเซตย่อยวิภัชนัยชนิด $(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$ เป็นโครงสร้างหนึ่งที่มีบทบาทสำคัญต่อการศึกษาแขนงกึ่งกรุปและอื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง ซึ่งพบได้ใน [15-26] ในกรณีที่แทน $\gamma = 0$ และ $\delta = 0.5$ จะได้ว่า $(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-กึ่งกรุปย่อย (ไอดีลซ้าย ไอดีลขวา ไอดีลคู่ ไอดีลคู่วางนัยทั่วไป ไอดีลภายใน ควอซี-ไอดีล ไอดีล) วิภัชนัยกับ $(\in,\in \vee q)$-กึ่งกรุปย่อย (ไอดีลซ้าย ไอดีลขวา ไอดีลคู่ ไอดีลคู่วางนัยทั่วไป ไอดีลภายใน ควอซี-ไอดีล, ไอดีล) วิภัชนัยของกึ่งกรุปคือสิ่งเดียวกัน และในกรณีที่แทน $\gamma = 0$ และ $\delta = 1$ จะได้ว่า $(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-กึ่งกรุปย่อย (ไอดีลซ้าย ไอดีลขวา ไอดีลคู่ ไอดีลคู่วางนัยทั่วไป ไอดีลภายใน ควอซี-ไอดีล ไอดีล) วิภัชนัยกับกึ่งกรุปย่อย (ไอดีลซ้าย ไอดีลขวา ไอดีลคู่ ไอดีลคู่วางนัยทั่วไป ไอดีลภายใน ควอซี-ไอดีล ไอดีล) วิภัชนัยของกึ่งกรุปคือสิ่งเดียวกัน

ในงานวิจัยนี้ คณะผู้วิจัยทำการพัฒนาเซตย่อยวิภัชนัยที่เป็นนัยทั่วไปของ $(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย $(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย $(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-ไอดีลขวาวิภัชนัย $(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย $(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-ไอดีลคู่วิภัชนัย $(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัย $(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-ไอดีลภายในวิภัชนัยและ $(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-ไอดีลวิภัชนัยของกึ่งกรุป และใช้เซตย่อยวิภัชนัยที่ถูกพัฒนามาเป็นเครื่องมือในการจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุป องค์ความรู้ใหม่ที่ได้รับจะครอบคลุมและสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้โดยรวมกับทฤษฎีกึ่งกรุปและทฤษฎีเซตวิภัชนัย รวมถึงศาสตร์แขนงอื่นๆ ที่มีความเกี่ยวข้องได้อีกด้วย ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้ในการศึกษาจะทำให้เกิดการพัฒนาวัตกรรมและองค์ความรู้ใหม่ทางวิทยาศาสตร์ ทางสังคมศาสตร์ และการพัฒนาองค์ความรู้ใหม่ในวิทยาการต่างๆ ซึ่งจะเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการพัฒนาศักยภาพทางวิชาการในสาขาวิชาที่เกี่ยวข้อง

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

1.2.1 เพื่อให้ Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัย Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย Δ-ไอดีลภายในวิภัชนัย Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยและ Δ-ไอดีลวิภัชนัยของกึ่งกรุปซึ่งเป็นนัยทั่วไปของ $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลขวาวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลภายในวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยและ Δ-ไอดีลวิภัชนัย ตามลำดับ เมื่อกำหนดให้ $\Delta \subseteq [0,1]$ และ $|\Delta| > 1$

1.2.2 เพื่อจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุป โดย Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัย Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยและ Δ-ไอดีลวิภัชนัย

1.3 ขอบเขตของโครงการวิจัย

ในการวิจัยนี้ คณะผู้วิจัยได้กำหนดขอบเขตของการศึกษาภายใต้โครงสร้าง Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัย Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย Δ-ไอดีลภายในวิภัชนัย Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยและ Δ-ไอดีลวิภัชนัย พร้อมทั้งใช้เซตย่อยวิภัชนัยชนิด Δ มาจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุป

1.4 ประโยชน์ที่ได้รับจากการศึกษา

ทำให้เกิดองค์ความรู้ใหม่ซึ่งเป็นการขยายปัญหามาจากเซตวิภัชนัยในกึ่งกรุป โดยคณะผู้วิจัยคาดว่าปัญหาที่ถูกศึกษาในงานวิจัยชิ้นนี้จะเป็นงานที่มีประโยชน์ต่อการศึกษาพีชคณิตและเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการพัฒนาศักยภาพทางวิชาการในสาขาวิชาที่เกี่ยวข้อง

บทที่ 2

ทฤษฎีบทและวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง

2.1 ความนำ

ในบทนี้จะเป็นการแนะนำความรู้พื้นฐาน แนวคิด สมบัติ บทนิยามและทฤษฎีบทเกี่ยวกับกึ่งกรุปและกึ่งกรุปวิภัชนัยที่นำมาใช้ในการวิจัยครั้งนี้ โดยแบ่งออกเป็น 2 หัวข้อดังนี้

- กึ่งกรุป

- กึ่งกรุปวิภัชนัย

2.2 กึ่งกรุป (semigroup)

ในหัวข้อนี้ เราจะให้ความรู้พื้นฐาน บทนิยามและทฤษฎีบทเกี่ยวกับกึ่งกรุปโดยเริ่มจากการศึกษาบทนิยามของกึ่งกรุป

บทนิยาม 2.2.1 กำหนดให้ S เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ "$\bullet$" เป็นฟังก์ชันจาก $S \times S$ ไปยัง S เราเรียก "$\bullet$" ว่า **การดำเนินการทวิภาค** (binary operation) บน S และจะใช้สัญลักษณ์ $x \bullet y$ แทนค่าของ $\bullet(x, y)$ และเราเรียก $(S,\bullet)$ ว่า **กึ่งกรุป** (semigroup) ถ้า

$$x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$$

สำหรับทุกๆ $x, y, z \in S$

ในกรณีที่ไม่เกิดความคลุมเครือในการใช้สัญลักษณ์ เราจะใช้ S แทนกึ่งกรุป $(S,\bullet)$ และเขียน xy แทน $x \bullet y$

บทนิยาม 2.2.2 ให้ A และ B เป็นเซตย่อยของกึ่งกรุป S เราจะนิยามเซตย่อย AB ของ S ดังนี้

$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$$

จากบทนิยาม 2.2.2 เราพบว่า สำหรับทุกเซตย่อยไม่ว่าง A, B และ C ของกึ่งกรุป S

$$(AB)C = A(BC)$$

ดังนั้นการเขียน ABC แทนค่าของ $(AB)C = A(BC)$ จึงไม่เกิดความคลุมเครือ และให้ x เป็นสมาชิกใดๆของกึ่งกรุป S และ A เป็นเซตย่อยของ S เพื่อความสะดวกในการเขียน เราจะเขียน xA แทน $\{x\}A$ และเขียน Ax แทน $A\{x\}$

บทนิยาม 2.2.3 กำหนดให้ A เป็นเซตย่อยของกึ่งกรุป S ที่ไม่ใช่เซตว่าง จะเรียก A ว่า **เซตย่อยกึ่งเฉพาะ** (semiprime subset) S ถ้า

$$(\forall x \in S)(x^2 \in A \rightarrow x \in A)$$

ต่อไปเราจะให้บทนิยามของ กึ่งกรุปย่อย ไอดีลซ้าย ไอดีลขวา ไอดีลคู่วางนัยทั่วไป ไอดีลคู่ ไอดีลภายใน ควอซี-ไอดีลและไอดีลของกึ่งกรุปซึ่งเป็นโครงสร้างย่อยที่สำคัญสำหรับการศึกษากึ่งกรุป ดังนี้

บทนิยาม 2.2.4 กำหนดให้ A เป็นเซตย่อยของกึ่งกรุป S ที่ไม่ใช่เซตว่าง

(i) จะเรียก A ว่า **กึ่งกรุปย่อย** (subsemigroup) ของ S ถ้า $A^2 \subseteq A$

(ii) จะเรียก A ว่า **ไอดีลซ้าย** (left ideal) ของ S ถ้า $SA \subseteq A$

(iii) จะเรียก A ว่า **ไอดีลขวา** (right ideal) ของ S ถ้า $AS \subseteq A$

(iv) จะเรียก A ว่า **ไอดีล** (ideal) ของ S ถ้า A เป็นทั้งไอดีลซ้ายและไอดีลขวาของ S

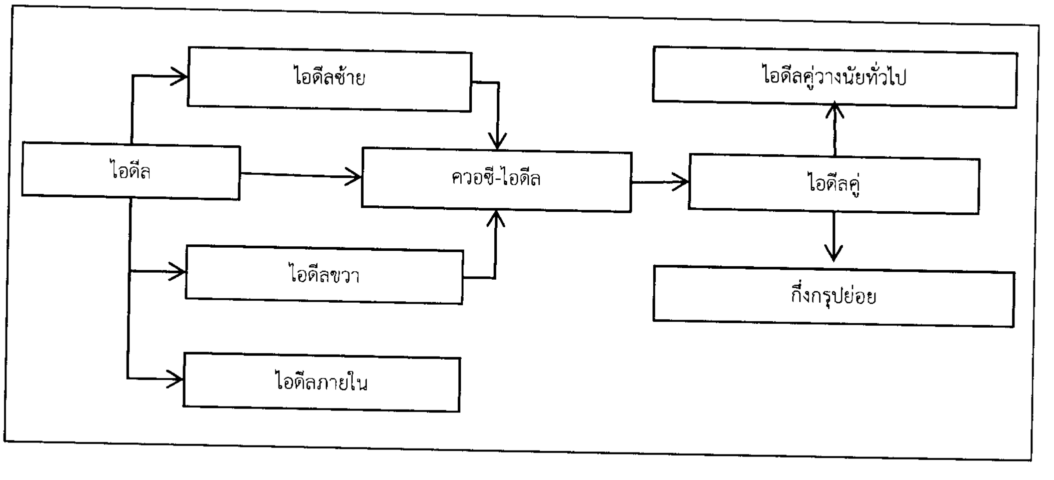
(v) จะเรียก A ว่า **ไอดีลภายใน** (interior ideal) ของ S ถ้า $SAS \subseteq A$

(vi) จะเรียก A ว่า **ควอซี-ไอดีล** (quasi-ideal) ของ S ถ้า $SA \cap AS \subseteq A$

(vii) จะเรียก A ว่า **ไอดีลคู่วางนัยทั่วไป** (generalized bi-ideal) ของ S ถ้า $ASA \subseteq A$

(viii) จะเรียก A ว่า **ไอดีลคู่** (bi-ideal) ของ S ถ้า A เป็นทั้งไอดีลคู่วางนัยทั่วไปและกึ่งกรุปย่อยของ S

เราจะได้ความสัมพันธ์ของโครงสร้างย่อยบนกึ่งกรุปที่ให้ในบทนิยาม 2.2.4 ดังนี้



ต่อไปเราจะให้บทนิยามของ กึ่งกรุปปกติ กึ่งกรุปปกติภายใน กึ่งกรุปกึ่งเชิงเดียว กึ่งกรุปปกติบริบูรณ์และกรุปในบทนิยาม 2.2.5 บทนิยาม 2.2.6 บทนิยาม 2.2.7 บทนิยาม 2.2.8 และบทนิยาม 2.2.9 ตามลำดับ

บทนิยาม 2.2.5 ให้ S เป็นกึ่งกรุป จะเรียก S ว่า **กึ่งกรุปปกติ** (regular semigroup) ถ้าสำหรับทุกสมาชิก x ของ S จะมีสมาชิก y ของ S ซึ่ง $x = xyx$

บทนิยาม 2.2.6 ให้ S เป็นกึ่งกรุป จะเรียก S ว่า **กึ่งกรุปปกติภายใน** (intra-regular semigroup) ถ้าสำหรับทุกสมาชิก x ของ S จะมีสมาชิก y และ z ของ S ซึ่ง $x = yx^2z$

บทนิยาม 2.2.7 ให้ S เป็นกึ่งกรุป จะเรียก S ว่า **กึ่งกรุปกึ่งเชิงเดียว** (semisimple semigroup) ถ้า $I^2 = I$ สำหรับทุกไอดีล I ของ S

บทนิยาม 2.2.8 ให้ S เป็นกึ่งกรุป จะเรียก S ว่า **กึ่งกรุปปกติบริบูรณ์** (completely regular semigroup) ถ้าสำหรับทุกสมาชิก x ของ S จะมีสมาชิก y ของ S ซึ่ง $x = xyx$ และ $xy = yx$

บทนิยาม 2.2.9 ให้ S เป็นกึ่งกรุป จะเรียก S ว่า **โมนอยด์** (monoid) ถ้า S มี**เอกลักษณ์** (identity) นั่นคือ จะมีสมาชิก e ของ S ถ้า $ae = a = ea$ สำหรับทุกสมาชิก a ของ S และเราเรียก e ว่า **เอกลักษณ์**ของ S

จะเรียก โมนอยด์ S ว่า **กรุป** (group) ถ้าทุกสมาชิกของ S มีตัวผกผัน (inverse) ใน S นั่นคือทุกสมาชิก a ของ S มีสมาชิก b ของ S ซึ่ง $ab = e = ba$ เมื่อ e เป็นเอกลักษณ์ของ S

ในทฤษฎีบท 2.2.1 ทฤษฎีบท 2.2.2 ทฤษฎีบท 2.2.3 ทฤษฎีบท 2.2.4 และ ทฤษฎีบท 2.2.5 เป็นทฤษฎีที่สำคัญต่อการศึกษาทฤษฎีกึ่งกรุป ทฤษฎีดังกล่าวเป็นการจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปชนิดกึ่งกรุปปกติ กึ่งกรุปปกติภายใน กึ่งกรุปกึ่งเชิงเดียว กึ่งกรุปปกติบริบูรณ์และกรุป โดยใช้โครงสร้างย่อยที่ให้ในบทนิยาม 2.2.4

ทฤษฎีบท 2.2.1 [27] ให้ S เป็นกึ่งกรุป เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) S เป็นกึ่งกรุปปกติ

(ii) $R \cap L = RL$ สำหรับทุกไอดีลขวา R และสำหรับทุกไอดีลซ้าย L ของ S

(iii) $QSQ = Q$ สำหรับทุกควอซี-ไอดีล Q ของ S

(iv) $BSB = B$ สำหรับทุกไอดีลคู่ B ของ S

ทฤษฎีบท 2.2.2 [27] ให้ S เป็นกึ่งกรุป เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) S เป็นกึ่งกรุปปกติภายใน

(ii) $R \cap L \subseteq LR$ สำหรับทุกไอดีลขวา R และสำหรับทุกไอดีลซ้าย L ของ S

ทฤษฎีบท 2.2.3 [27] ให้ S เป็นกึ่งกรุป เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) S เป็นกึ่งกรุปกึ่งเชิงเดียว

(ii) $a \in (SaS)(SaS)$ สำหรับทุกสมาชิก a ของ S

ทฤษฎีบท 2.2.4 [27] ให้ S เป็นกึ่งกรุป เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) S เป็นกึ่งกรุปปกติบริบูรณ์

(ii) ทุกไอดีลคู่ของ S เป็นเซตย่อยกึ่งเฉพาะ

ทฤษฎีบท 2.2.5 [28] ให้ S เป็นกึ่งกรุป เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) S เป็นกรุป

(ii) $B = S$ สำหรับทุกไอดีลคู่ B ของ S

2.3 กึ่งกรุปวิภัชนัย (fuzzy semigroup)

ในหัวข้อนี้ เราจะให้ความรู้พื้นฐาน บทนิยาม สมบัติและทฤษฎีบทเกี่ยวกับกึ่งกรุปวิภัชนัย โดยเริ่มจากการศึกษาบทนิยามของเซตวิภัชนัย

บทนิยาม 2.3.1 [1] ให้ X เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ f เป็นฟังก์ชันจาก X ไปยังช่วงปิด $[0,1]$ เราเรียก f ว่า **เซตวิภัชนัย** (fuzzy set) หรือเรียกอีกอย่างว่า **เซตย่อยวิภัชนัย** (fuzzy subset) ของ X

บทนิยาม 2.3.2 [27] กำหนดให้ f และ g เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S นิยามเซตย่อยวิภัชนัย $f \wedge g$ ของ S โดย

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\} \text{ สำหรับทุกๆ } x \in S$$

บทนิยาม 2.3.3 [27] กำหนดให้ f และ g เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S จะกล่าวว่า $f \le g$ ถ้า $f(x) \le g(x)$ สำหรับทุกๆ $x \in S$ และจะกล่าวว่า $f = g$ ถ้า $f \le g$ และ $g \le f$

บทนิยาม 2.3.4 [27] กำหนดให้ f และ g เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S นิยามเซตย่อยวิภัชนัย $f \circ g$ ของ S โดย

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} \sup\limits_{x=yz}\{\min\{f(y), g(z)\}\}; & x \in S^2 \\ 0 & ; \ x \notin S^2 \end{cases}$$

สำหรับทุกๆ $x \in S$

บทนิยาม 2.3.5 [27] ให้ A เป็นเซตย่อยของกึ่งกรุป S และ C_A เป็นฟังก์ชันจาก S ไปยัง $\{0,1\}$ โดยนิยาม

$$C_A(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in A \\ 0 & ; x \notin A \end{cases}$$

สำหรับทุกๆ $x \in S$

เราเรียก C_A ว่า **ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ** (characteristic function) ของ A

สมบัติ 2.3.1 [27] กำหนดให้ A และ B เป็นเซตย่อยของกึ่งกรุป S ที่ไม่ใช่เซตว่าง จะได้ว่า

$$C_A \wedge C_B = C_{A \cap B} \text{ และ } C_A \circ C_B = C_{AB}$$

ต่อไปเราจะให้บทนิยามของ กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย ไอดีลซ้ายวิภัชนัย ไอดีลขวาวิภัชนัย ควอซี-ไอดีล ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย ไอดีลคู่วิภัชนัย ไอดีลภายในวิภัชนัยและไอดีลวิภัชนัยของกึ่งกรุป ซึ่งเป็นโครงสร้างย่อยวิภัชนัยที่สำคัญสำหรับการศึกษากึ่งกรุปวิภัชนัย ดังนี้

บทนิยาม 2.3.6 [27] กำหนดให้ f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S

(i) จะเรียก f ว่า **กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย** (fuzzy subsemigroup) ของ S ถ้า

$$f(xy) \geq \min\{f(x), f(y)\} \text{ สำหรับทุกๆ } x, y \in S$$

(ii) จะเรียก f ว่า **ไอดีลซ้ายวิภัชนัย** (fuzzy left ideal) ของ S ถ้า

$$f(xy) \geq f(y) \text{ สำหรับทุกๆ } x, y \in S$$

(iii) จะเรียก f ว่า **ไอดีลขวาวิภัชนัย** (fuzzy right ideal) ของ S ถ้า

$$f(xy) \geq f(x) \text{ สำหรับทุกๆ } x, y \in S$$

(iv) จะเรียก f ว่า **ไอดีลวิภัชนัย** (fuzzy ideal) ของ S ถ้า f เป็นทั้งไอดีลซ้ายวิภัชนัยและไอดีลขวาวิภัชนัยของ S

(v) จะเรียก f ว่า **ไอดีลภายในวิภัชนัย** (fuzzy interior ideal) ของ S ถ้า

$$f(xyz) \geq f(y) \text{ สำหรับทุกๆ } x, y, z \in S$$

(vi) จะเรียก f ว่า **ควอซี-ไอดีลวิภัชนัย** (fuzzy quasi-ideal) ของ S ถ้า

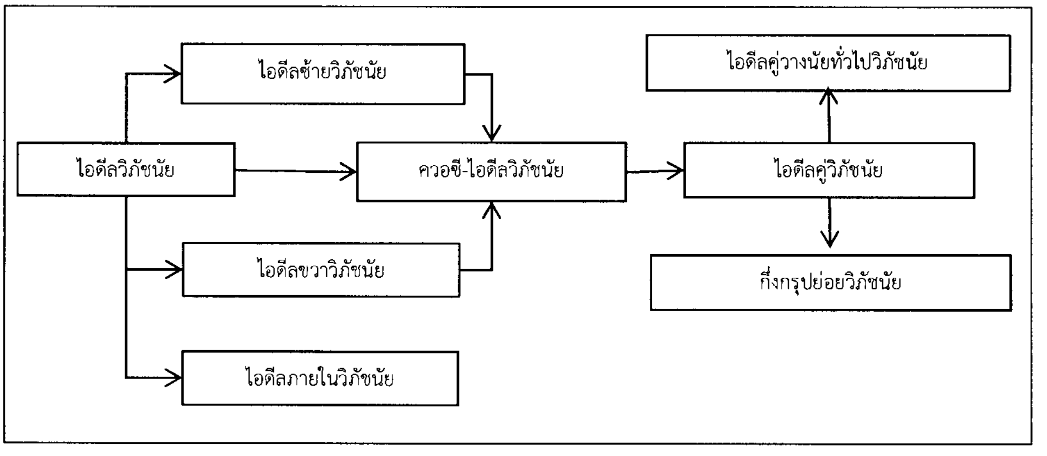
$$C_S \circ f \wedge f \circ C_S \leq f$$

(vii) จะเรียก f ว่า **ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย** (fuzzy generalized bi-ideal) ของ S ถ้า

$$f(xyz) \geq \min\{f(x), f(z)\} \text{ สำหรับทุกๆ } x, y, z \in S$$

(viii) จะเรียก f ว่า **ไอดีลคู่วิภัชนัย** (fuzzy bi-ideal) ของ S ถ้า f เป็นทั้งไอดีลคู่วางนัย-ทั่วไปวิภัชนัยและกึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S

เราจะได้ความสัมพันธ์ของโครงสร้างย่อยวิภัชนัยบนกึ่งกรุปที่ให้ในบทนิยาม 2.3.6 ดังนี้



จากบทนิยาม 2.2.4 บทนิยาม 2.3.5 และ บทนิยาม 2.3.6 เราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างเซตย่อยวิภัชนัยและเซตย่อยของกึ่งกรุป ดังสมบัติต่อไปนี้

สมบัติ 2.3.2 [27] ให้ A เป็นเซตย่อยของกึ่งกรุป S ที่ไม่ใช่เซตว่าง ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

(i) A เป็นกึ่งกรุปย่อยของ S ก็ต่อเมื่อ C_A เป็นกึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S

(ii) A เป็นไอดีลซ้ายของ S ก็ต่อเมื่อ C_A เป็นไอดีลซ้ายวิภัชนัยของ S

(iii) A เป็นไอดีลขวาของ S ก็ต่อเมื่อ C_A เป็นไอดีลขวาวิภัชนัยของ S

(iv) A เป็นไอดีลของ S ก็ต่อเมื่อ C_A เป็นไอดีลวิภัชนัยของ S

(v) A เป็นไอดีลภายในของ S ก็ต่อเมื่อ C_A เป็นไอดีลภายในวิภัชนัยของ S

(vi) A เป็นควอซี-ไอดีลของ S ก็ต่อเมื่อ C_A เป็นควอซี-ไอดีลวิภัชนัยของ S

(vii) A เป็นไอดีลคู่วางนัยทั่วไปของ S ก็ต่อเมื่อ C_A เป็นไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัยของ S

(viii) A เป็นไอดีลคู่ของ S ก็ต่อเมื่อ C_A เป็นไอดีลคู่วิภัชนัยของ S

กำหนดให้ γ และ δ เป็นสมาชิกของ $[0,1]$ ซึ่ง $\gamma < \delta$ ในปี 2013 Shabir และ Ali [14] ได้แนะนำแนวคิด $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลขวาวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลภายในวิภัชนัยและ $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลวิภัชนัยของกึ่งกรุปที่เป็นนัยทั่วไปของกึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย ไอดีลซ้ายวิภัชนัย ไอดีลขวาวิภัชนัย ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย ควอซี-ไอดีลวิภัชนัย ไอดีลคู่วิภัชนัย ไอดีลภายในวิภัชนัยและไอดีลวิภัชนัยตามลำดับ พร้อมกับจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปโดยเซตย่อยวิภัชนัยชนิด $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$ การศึกษาของ Shabir และ Ali มีบทนิยาม สมบัติ ทฤษฎีและข้อสรุปที่สำคัญและจำเป็นสำหรับการทำวิจัยในครั้งนี้ ดังนี้

บทนิยาม 2.3.7 [14] ให้ f และ g เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S. นิยาม $f^*, f \wedge^* g$ และ $f * g$ โดย

(i) $f^*(x) = \max\{\min\{f(x), \delta\}, \gamma\}$ สำหรับทุกๆ $x \in S$

(ii) $(f \wedge^* g)(x) = \max\{\min\{(f \wedge g)(x), \delta\}, \gamma\}$ สำหรับทุกๆ $x \in S$

(iii) $(f * g)(x) = \max\{\min\{(f \circ g)(x), \delta\}, \gamma\}$ สำหรับทุกๆ $x \in S$

จากบทนิยาม 2.3.7 เมื่อกำหนดให้ f และ g เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S จะพบว่า $f \wedge^* g = f^* \wedge g^*$, $f^* \circ g^* \leq f * g$ และในกรณีที่ $S^2 = S$ จะได้ว่า $f^* \circ g^* = f * g$ สำหรับสมาชิก x ของ S จะพบว่า $f^*(x) \leq g^*(x)$ ก็ต่อเมื่อ $\min\{f(x), \delta\} \leq \max\{g(x), \gamma\}$

บทนิยาม 2.3.8 [14] ให้ f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S

(i) จะเรียก f ว่า $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$**-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย** ($(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy subsemigroup) ของ S ถ้า

$$\max\{f(xy), \gamma\} \geq \min\{f(x), f(y), \delta\} \text{ สำหรับทุกๆ } x, y \in S$$

(ii) จะเรียก f ว่า $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$**-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย** ($(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy left ideal) ของ S ถ้า

$$\max\{f(xy), \gamma\} \geq \min\{f(y), \delta\} \text{ สำหรับทุกๆ } x, y \in S$$

(iii) จะเรียก f ว่า $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$**-ไอดีลขวาวิภัชนัย** ($(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy right ideal) ของ S ถ้า

$$\max\{f(xy), \gamma\} \geq \min\{f(x), \delta\} \text{ สำหรับทุกๆ } x, y \in S$$

(iv) จะเรียก f ว่า $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$**-ไอดีลวิภัชนัย** ($(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy ideal) ของ S ถ้า f เป็นทั้ง $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลซ้ายวิภัชนัยและ $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลขวาวิภัชนัยของ S

(v) จะเรียก f ว่า $(\in_{\gamma}, \in_{\gamma} \vee q_{\delta})$ **-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัย** ($(\in_{\gamma}, \in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-fuzzy quasi-ideal) ของ S ถ้า

$$(f * C_S) \wedge (C_S * f) \leq f^*$$

(vi) จะเรียก f ว่า $\left(\in_{\gamma}, \in_{\gamma} \vee q_{\delta}\right)$**-ไอดีลภายในวิภัชนัย** ($\left(\in_{\gamma}, \in_{\gamma} \vee q_{\delta}\right)$-fuzzy interior ideal) ของ S ถ้า

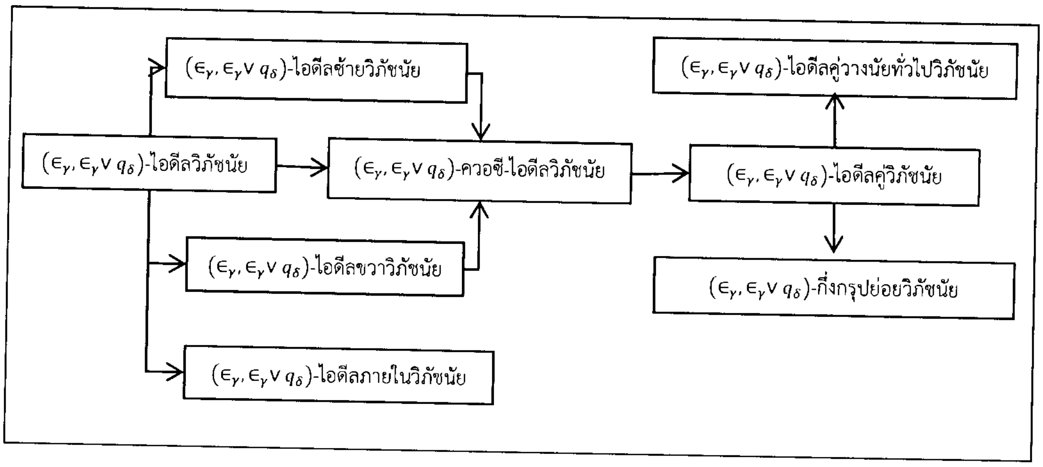
$$\max\{f(xyz), \gamma\} \geq \min\{f(y), \delta\} \text{ สำหรับทุกๆ } x, y, z \in S$$

(vii) จะเรียก f ว่า $\left(\in_{\gamma}, \in_{\gamma} \vee q_{\delta}\right)$**-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย** ($\left(\in_{\gamma}, \in_{\gamma} \vee q_{\delta}\right)$-fuzzy generalized bi-ideal) ของ S ถ้า

$$\max\{f(xyz), \gamma\} \geq \min\{f(x), f(z), \delta\} \text{ สำหรับทุกๆ } x, y, z \in S$$

(viii) จะเรียก f ว่า $\left(\in_{\gamma}, \in_{\gamma} \vee q_{\delta}\right)$**-ไอดีลคู่วิภัชนัย** ($\left(\in_{\gamma}, \in_{\gamma} \vee q_{\delta}\right)$-fuzzy bi-ideal) ของ S ถ้า f เป็นทั้ง $\left(\in_{\gamma}, \in_{\gamma} \vee q_{\delta}\right)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยและ $\left(\in_{\gamma}, \in_{\gamma} \vee q_{\delta}\right)$-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย ของ S

จากบทนิยาม 2.3.6 และบทนิยาม 2.3.8 เราพบว่าบทนิยาม 2.3.6 เป็นกรณีเฉพาะที่แทน $\gamma = 0$ และ $\delta = 1$ ในบทนิยาม 2.3.8 และเราจะได้ความสัมพันธ์ของโครงสร้างย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุปที่ให้ในบทนิยาม 2.3.8 ดังนี้



จากบทนิยาม 2.2.4, บทนิยาม 2.3.5 และบทนิยาม 2.3.8 เราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างเซตย่อยวิภัชนัยชนิด $\left(\in_{\gamma}, \in_{\gamma} \vee q_{\delta}\right)$ และเซตย่อยของกึ่งกรุป ดังนี้

สมบัติ 2.3.3 [14] ให้ A เป็นเซตย่อยของกึ่งกรุป S ที่ไม่ใช่เซตว่าง ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

(i) A เป็นกึ่งกรุปย่อยของ S ก็ต่อเมื่อ C_A เป็น $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S

(ii) A เป็นไอดีลซ้ายของ S ก็ต่อเมื่อ C_A เป็น $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลซ้ายวิภัชนัยของ S

(iii) A เป็นไอดีลขวาของ S ก็ต่อเมื่อ C_A เป็น $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลขวาวิภัชนัยของ S

(iv) A เป็นไอดีลของ S ก็ต่อเมื่อ C_A เป็น $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลวิภัชนัยของ S

(v) A เป็นไอดีลภายในของ S ก็ต่อเมื่อ C_A เป็น$(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลภายในวิภัชนัยของ S

(vi) A เป็นควอซี-ไอดีลของ S ก็ต่อเมื่อ C_A เป็น $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยของ S

(vii) A เป็นไอดีลคู่วางนัยทั่วไปของ S ก็ต่อเมื่อ C_A เป็น $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วางนัย-ทั่วไปวิภัชนัยของ S

(viii) A เป็นไอดีลคู่ของ S ก็ต่อเมื่อ C_A เป็น $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วิภัชนัยของ S

ผลจากการศึกษาของ Shabir และ Ali ใน [14] ทำให้ได้ลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปโดยใช้ เซตย่อยวิภัชนัยชนิด $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$ ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.3.1 [14] ให้ S เป็นกึ่งกรุป เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) S เป็นกึ่งกรุปปกติ

(ii) $f * g = f \wedge^* g$ สำหรับทุก $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลขวาวิภัชนัย f และ $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย g ของ S

ทฤษฎีบท 2.3.2 [14] ให้ S เป็นกึ่งกรุป เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) S เป็นกึ่งกรุปปกติ

(ii) $f * C_S * f = f^*$ สำหรับทุก $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย f ของ S

(iii) $f * C_S * f = f^*$ สำหรับทุก $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วิภัชนัย f ของ S

(iv) $f * C_S * f = f^*$ สำหรับทุก $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัย f ของ S

ทฤษฎีบท 2.3.3 [14] ให้ S เป็นกึ่งกรุป เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) S เป็นกึ่งกรุปกึ่งเชิงเดียว

(ii) $f * f = f^*$ สำหรับทุก $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลวิภัชนัย f ของ S

บทที่ 3

การดำเนินการวิจัย

ในบทนี้ จะกล่าวถึงขั้นตอนการดำเนินการวิจัย ตารางแสดงระยะเวลาทำวิจัยและแผนการดำเนินงานตลอดทั้งโครงการวิจัย และเครื่องมือการทำวิจัยโดยมีรายละเอียดดังนี้

3.1 ขั้นตอนการดำเนินการวิจัย

ในขั้นตอนการดำเนินการวิจัยเรื่อง การจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปโดย Δ-ไอดีลวิภัชนัย ประกอบไปด้วย 5 ขั้นตอนที่สำคัญ ดังนี้

3.1.1 รวบรวมบทนิยาม สมบัติ ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับเซตวิภัชนัย กึ่งกรุป และกึ่งกรุปวิภัชนัย

3.1.2 ทำการสร้างบทนิยามที่เกี่ยวข้องกับเซตย่อยวิภัชนัยที่เป็นนัยทั่วไปของ $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลขวาวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลภายในวิภัชนัยและ $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลวิภัชนัยของกึ่งกรุป

3.1.3 สร้างทฤษฎีบทหลักและดำเนินการพิสูจน์

3.1.4 พิจารณาบทแทรกที่ได้จากทฤษฎีบทหลัก

3.1.5 เรียบเรียงข้อมูลทั้งหมด ตีพิมพ์ และจัดทำเล่มรายงาน

3.2 ตารางแสดงระยะเวลาทำวิจัยและแผนการดำเนินงาน

ปี (งบประมาณ)	กิจกรรม	ระยะเวลา(เดือน)												ร้อยละของกิจกรรมในปีงบประมาณ
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
2561	รวบรวมบทนิยาม สมบัติ ทฤษฎีบท และบทความที่เกี่ยวกับเซตวิภัชนัย กึ่งกรุป และกึ่งกรุปวิภัชนัย	x	x	x										20
2561	ทำการสร้างบทนิยามที่เกี่ยวข้องกับเซตย่อยวิภัชนัยที่เป็นนัยทั่วไปของ $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลขวา			x	x	x								20

ปี (งบประมาณ)	กิจกรรม	ระยะเวลา(เดือน)												ร้อยละของกิจกรรมในปีงบประมาณ
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
	วิภัชนัย $(\in_\gamma,\in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย $(\in_\gamma,\in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วิภัชนัย $(\in_\gamma,\in_\gamma \vee q_\delta)$-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัย $(\in_\gamma,\in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลภายในวิภัชนัย $(\in_\gamma,\in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลวิภัชนัยของกึ่งกรุป													
2561	สร้างทฤษฎีบทหลักและดำเนินการพิสูจน์						x	x	x					20
2561	พิจารณาบทแทรกที่ได้รับจากทฤษฎีบทหลัก								x	x	x			20
2561	เรียบเรียงข้อมูลทั้งหมด ตีพิมพ์และจัดทำเล่มรายงาน										x	x	x	20
	รวม													100

3.3 เครื่องมือการทำวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาคือเครื่องมือสำหรับการพัฒนาการเรียนรู้ได้แก่ อินเทอร์เน็ต เอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวกับทฤษฎีกึ่งกรุปและทฤษฎีกึ่งกรุปวิภัชนัย

บทที่ 4

ผลการศึกษา

4.1 ความนำ

ในบทนี้ คณะผู้วิจัยจะแนะนำโครงสร้าง Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัย Δ-ไอดีลวิภัชนัย Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัย Δ-ไอดีลภายในวิภัชนัย Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัยและ Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัยของกึ่งกรุป พร้อมกับใช้เซตย่อยวิภัชนัยเหล่านี้เป็นเครื่องมือในการจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปชนิดที่สำคัญจำนวน 5 ชนิดคือ กึ่งกรุปปกติ กึ่งกรุปปกติบริบูรณ์ กึ่งกรุปปกติภายใน กึ่งกรุปกึ่งเชิงเดียวและกรุป

4.2 Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย

กำหนดให้ Δ เป็นเซตย่อยของ $[0,1]$ ซึ่ง $|\Delta|>1$ ในหัวข้อนี้เราจะแนะนำ Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุปซึ่งเป็นนัยทั่วไปของ $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย พร้อมกับให้สมบัติที่สำคัญของ Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย

บทนิยาม 4.2.1 ให้ f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S เซตย่อย $S[f;\Delta]$ ของ S นิยามดังนี้

$$S[f;\Delta]=\{x\in S \mid f(x)\geq \sup(\Delta) \text{ หรือ } f(x)\in\Delta \text{ หรือ } f(x)\leq \inf(\Delta)\}$$

ข้อสังเกต ให้ f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S ถ้า $\Delta=(\gamma,\delta), \Delta=[\gamma,\delta), \Delta=(\gamma,\delta]$ หรือ $\Delta=[\gamma,\delta]$ แล้ว $S[f;\Delta]=S$

บทนิยาม 4.2.2 ให้ f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S นิยามเซตย่อยวิภัชนัย f^Δ และ f_Δ ของ S ดังนี้

$$f^\Delta(x)=\begin{cases}\max\{\min\{f(x),\sup(\Delta)\},\inf(\Delta)\} & ;x\in S[f;\Delta]\\ \sup(\Delta) & ;x\notin S[f;\Delta]\end{cases} \quad \text{สำหรับทุกๆ } x\in S$$

และ

$$f_\Delta(x)=\begin{cases}\max\{\min\{f(x),\sup(\Delta)\},\inf(\Delta)\} & ;x\in S[f;\Delta]\\ \inf(\Delta) & ;x\notin S[f;\Delta]\end{cases} \quad \text{สำหรับทุกๆ } x\in S$$

บทนิยาม 4.2.3 ให้ f และ g เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S นิยาม $f \leq_{\Delta} g$ ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$(\forall x \in S)(x \in S[g;\Delta] \rightarrow \min\{f(x), \sup(\Delta)\} \leq \max\{g(x), \inf(\Delta)\})$$

บทนิยาม 4.2.4 กำหนดให้ f และ g เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S นิยาม $f =_{\Delta} g$ ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$(\forall x \in S)(x \in S[g;\Delta] \rightarrow f_{\Delta}(x) = g_{\Delta}(x))$$

สมบัติ 4.2.1 ให้ f, g และ h เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

(i) ถ้า $f \leq g$ และ $g \leq_{\Delta} h$ แล้ว $f \leq_{\Delta} h$

(ii) ถ้า $f = g$ แล้ว $f =_{\Delta} g$

การพิสูจน์ (i) สมมติว่า $f \leq g$, $g \leq_{\Delta} h$ และ $x \in S[h;\Delta]$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\max\{h(x), \inf(\Delta)\} &\geq \min\{g(x), \sup(\Delta)\} \\ &\geq \min\{f(x), \sup(\Delta)\}\end{aligned}$$

ดังนั้น $f \leq_{\Delta} h$ ตามต้องการ

(ii) สมมติ $f = g$ และ $x \in S[g;\Delta]$ จะได้ว่า $f(x) = g(x)$ ซึ่งได้ว่า $f_{\Delta}(x) = g_{\Delta}(x)$ □

ในกรณีที่แทน $\Delta = (\gamma, \delta), \Delta = (\gamma, \delta], \Delta = [\gamma, \delta)$ หรือ $\Delta = [\gamma, \delta]$ ในบทนิยาม 4.2.2, บทนิยาม 4.2.3 และบทนิยาม 4.2.4 เราจะได้สมบัติต่อไปนี้

สมบัติ 4.2.2 กำหนดให้ f และ g เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S ถ้า $\Delta = (\gamma, \delta)$, $\Delta = (\gamma, \delta]$, $\Delta = [\gamma, \delta)$ หรือ $\Delta = [\gamma, \delta]$ แล้วเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

(i) $f^{\Delta} = f_{\Delta} = f^{*}$

(ii) $f \leq_{\Delta} g$ ก็ต่อเมื่อ $f^{*} \leq g^{*}$

(iii) $f =_{\Delta} g$ ก็ต่อเมื่อ $f^{*} = g^{*}$

การพิสูจน์ สมมติว่า $\Delta = (\gamma, \delta)$, $\Delta = (\gamma, \delta]$, $\Delta = [\gamma, \delta)$ หรือ $\Delta = [\gamma, \delta]$ จะได้ว่า $\sup(\Delta) = \delta$, $\inf(\Delta) = \gamma$ และ $S[f;\Delta] = S[g;\Delta] = S$

(1) จะแสดงว่า $f^{\Delta} = f_{\Delta} = f^{*}$ ให้ $x \in S$ จะได้ว่า $x \in S[f;\Delta]$ และทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}f^{\Delta}(x) &= \max\{\min\{f(x), \sup(\Delta)\}, \inf(\Delta)\} \\ &= \max\{\min\{f(x), \delta\}, \gamma\} \\ &= f^{*}(x)\end{aligned}$$

และ

$$
\begin{aligned}
f_\Delta(x) &= \max\{\min\{f(x),\sup(\Delta)\},\inf(\Delta)\} \\
&= \max\{\min\{f(x),\delta\},\gamma\} \\
&= f^*(x)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f^\Delta = f_\Delta = f^*$

(ii) เนื่องจาก $\sup(\Delta)=\delta$, $\inf(\Delta)=\gamma$ และ $S[f;\Delta]=S[g;\Delta]=S$ ทำให้ได้ว่า

$f \le_\Delta g \;\Leftrightarrow\; \min\{f(x),\sup(\Delta)\} \le \max\{g(x),\inf(\Delta)\}$ สำหรับทุกๆ $x\in S[g;\Delta]$

$\Leftrightarrow\; \min\{f(x),\delta\} \le \max\{g(x),\gamma\}$ สำหรับทุกๆ $x\in S$

$\Leftrightarrow\; f^* \le g^*$

(iii)($\Rightarrow$) สมมติว่า $f =_\Delta g$ และ $x\in S$ จะได้ว่า $x\in S[g;\Delta]$ ดังนั้นโดย (i) จึงได้ว่า

$$f^*(x) = f_\Delta(x) = g_\Delta(x) = g^*(x)$$

ดังนั้น $f^* = g^*$

($\Leftarrow$) สมมติว่า $f^* = g^*$ และ $x\in S[g;\Delta]$ ดังนั้นโดย (i) จึงได้ว่า

$$f_\Delta(x) = f^*(x) = g^*(x) = g_\Delta(x)$$

ดังนั้น $f =_\Delta g$

□

สมบัติ 4.2.3 กำหนดให้ A เป็นเซตย่อยของกึ่งกรุป S จะได้ว่า

$$(C_A)_\Delta(x) = \begin{cases} \sup(\Delta) & ; x\in A \\ \inf(\Delta) & ; x\notin A \end{cases} \quad \text{สำหรับทุกๆ } x\in S$$

การพิสูจน์ ให้ A เป็นเซตย่อยของกึ่งกรุป S และ $x\in S$ จะได้ว่า $x\in S[C_A;\Delta]$ ต่อไปเราจะพิจารณาออกเป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 สมมติว่า $x\in A$ จะได้ว่า $C_A(x)=1$ ฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
(C_A)_\Delta(x) &= \max\{\min\{C_A(x),\sup(\Delta)\},\inf(\Delta)\} \\
&= \max\{\min\{1,\sup(\Delta)\},\inf(\Delta)\} \\
&= \max\{\sup(\Delta),\inf(\Delta)\} \\
&= \sup(\Delta)
\end{aligned}
$$

กรณีที่ 2 สมมติว่า $x\notin A$ จะได้ว่า $C_A(x)=0$ ฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
(C_A)_\Delta(x) &= \max\{\min\{C_A(x),\sup(\Delta)\},\inf(\Delta)\} \\
&= \max\{\min\{0,\sup(\Delta)\},\inf(\Delta)\} \\
&= \max\{0,\inf(\Delta)\} \\
&= \inf(\Delta)
\end{aligned}
$$

จากกรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 เราสามารถสรุปได้ว่า

$$(C_A)_\Delta(x)=\begin{cases}\sup(\Delta) & ; x\in A\\ \inf(\Delta) & ; x\notin A\end{cases}$$

สำหรับทุกๆ $x\in S$

□

สมบัติ 4.2.4 กำหนดให้ A และ B เป็นเซตย่อยของกึ่งกรุป S เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) $A=B$

(ii) $C_A =_\Delta C_B$

(iii) $C_B =_\Delta C_A$

การพิสูจน์ ให้ A และ B เป็นเซตย่อยของกึ่งกรุป S จะได้ว่า

$$S[C_A;\Delta]=S[C_B;\Delta]=S$$

และโดยสมบัติ 4.2.3 จะได้ว่า

$$(C_A)_\Delta(x)=\begin{cases}\sup(\Delta) & ; x\in A\\ \inf(\Delta) & ; x\notin A\end{cases} \text{ และ } (C_B)_\Delta(x)=\begin{cases}\sup(\Delta) & ; x\in B\\ \inf(\Delta) & ; x\notin B\end{cases}$$

สำหรับทุกๆ $x\in S$

ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} A=B &\Leftrightarrow C_A(x)=C_B(x) \text{ สำหรับทุกๆ } x\in S\\ &\Leftrightarrow (C_A)_\Delta(x)=(C_B)_\Delta(x) \text{ สำหรับทุกๆ } x\in S[C_B;\Delta]\\ &\Leftrightarrow C_A =_\Delta C_B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A=B &\Leftrightarrow C_A(x)=C_B(x) \text{ สำหรับทุกๆ } x\in S\\ &\Leftrightarrow (C_B)_\Delta(x)=(C_A)_\Delta(x) \text{ สำหรับทุกๆ } x\in S[C_A;\Delta]\\ &\Leftrightarrow C_B =_\Delta C_A\end{aligned}$$

จากการพิสูจน์ข้างต้น เราจึงสรุปได้ว่า (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) ตามต้องการ

□

ต่อไปเราจะแนะนำเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุปซึ่งเป็นนัยทั่วไปของ $(\in_\gamma,\in_\gamma \vee q_\delta)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป

บทนิยาม 4.2.5 กำหนดให้ f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S เรียก f ว่า Δ**-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย** (Δ-fuzzy subsemigroup) ของ S ถ้า f สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$(\forall x, y \in S)\left(xy \in S[f;\Delta] \rightarrow \max\left\{f\left(xy\right), \inf\left(\Delta\right)\right\} \geq \min\left\{f\left(x\right), f\left(y\right), \sup\left(\Delta\right)\right\}\right)$$

ตัวอย่าง 4.2.1 กำหนดให้ $S = \{a, b, c, d\}$ และการดำเนินการทวิภาค "$*$" บน S โดยนิยามดังนี้

$*$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	a	b
d	a	a	b	c

จะได้ว่า S เป็นกึ่งกรุปภายใต้การดำเนินการทวิภาค "$*$" ต่อไปเรานิยามเซตย่อยวิภัชนัย f ของ S โดย

$$f\left(a\right) = 0.4, \quad f\left(b\right) = 0.6, \quad f\left(c\right) = 0.5, \quad f\left(d\right) = 0.3$$

กำหนดให้ $\Delta = \{0.3, 0.5, 0.6\}$ พบว่า f เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S แต่พบว่า f ไม่เป็น $(\in_{0.3}, \in_{0.3} \vee q_{0.6})$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S เพราะว่า

$$\begin{aligned} \max\left\{f\left(b*c\right), 0.3\right\} &= \max\left\{f\left(a\right), 0.3\right\} \\ &= 0.4 \\ &< 0.5 \\ &= \min\left\{f(b), f(c), 0.6\right\} \end{aligned}$$

□

จากบทนิยาม 4.2.5 และเมื่อเรากำหนดให้ $\Delta = (\gamma, \delta), \Delta = [\gamma, \delta), \Delta = (\gamma, \delta]$ หรือ $\Delta = [\gamma, \delta]$ จะพบว่าเซตย่อยวิภัชนัย f ของกึ่งกรุป S เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S ก็ต่อเมื่อ

$$\max\{f(xy),\gamma\}\geq\min\{f(x),f(y),\delta\} \text{ สำหรับ } x,y\in S$$

นั่นคือ f เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S ก็ต่อเมื่อ f เป็น $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S ดังนั้น เราจึงสามารถสรุปได้ว่า Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุปเป็นนัยทั่วไปของ $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป

ทฤษฎีบท 4.2.1 ให้ f เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S และ Ω เป็นเซตย่อยของ Δ ซึ่ง $S[f;\Omega]\subseteq S[f;\Delta]$ และ $|\Omega|>1$ จะได้ว่า f เป็น Ω-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S

การพิสูจน์ ให้ $x,y\in S$ และ $xy\in S[f;\Omega]$ จะได้ว่า

$$\sup(\Delta)\geq\sup(\Omega),\ \inf(\Omega)\geq\inf(\Delta) \text{ และ } xy\in S[f;\Delta]$$

เนื่องจาก f เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S จึงทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\max\{f(xy),\inf(\Omega)\} &\geq \max\{f(xy),\inf(\Delta)\}\\ &\geq \min\{f(x),f(y),\sup(\Delta)\}\\ &\geq \min\{f(x),f(y),\sup(\Omega)\}\end{aligned}$$

ดังนั้น f เป็น Ω-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S □

ให้ f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S และ $\Delta\subseteq[\gamma,\delta]$ จะได้ $S[f;\Delta]\subseteq S[f;[\gamma,\delta]]$ และโดยใช้ทฤษฎีบท 4.2.1 จะได้บทแทรก 2.4.1 ทันที

บทแทรก 4.2.1 กำหนดให้ f เป็น $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S จะได้ว่า f เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S สำหรับเซตย่อยไม่ว่าง Δ ของ $[\gamma,\delta]$

การพิสูจน์ ให้ Δ เป็นเซตย่อยของ $[\gamma,\delta]$ จะได้ว่า

$$\sup[\gamma,\delta]=\delta,\ \inf[\gamma,\delta]=\gamma \text{ และ } S[f;\Delta]\subseteq S[f;[\gamma,\delta]]=S$$

เนื่องจาก f เป็น $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S จึงได้ว่า f เป็น $[\gamma,\delta]$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S เนื่องจาก $|\Delta|>1$, $\Delta\subseteq[\gamma,\delta]$, $S[f;\Delta]\subseteq S[f;[\gamma,\delta]]$ และโดยทฤษฎีบท 4.2.1 จึงได้ว่า f เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S ตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 4.2.2 ถ้า f และ g เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S แล้ว $f\wedge g$ เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S

การพิสูจน์ สมมติ $x,y\in S$ และ $xy\in S[f\wedge g;\Delta]$ เราจะแยกพิจารณา 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ให้ $(f\wedge g)(xy)=f(xy)$ จะได้ว่า $xy\in S[f;\Delta]$

เนื่องจาก f เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S จะได้ว่า

$$\max\{f(xy),\inf(\Delta)\}\geq \min\{f(x),f(y),\sup(\Delta)\}$$

และทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\max\{(f\wedge g)(xy),\inf(\Delta)\} &= \max\{f(xy),\inf(\Delta)\}\\ &\geq \min\{f(x),f(y),\sup(\Delta)\}\\ &\geq \min\{(f\wedge g)(x),(f\wedge g)(y),\sup(\Delta)\}\end{aligned}$$

กรณีที่ 2 ให้ $(f\wedge g)(xy)=g(xy)$ โดยการพิสูจน์ทำนองเดียวกับ**กรณีที่ 1** ซึ่งทำให้ได้

$$\max\{(f\wedge g)(xy),\inf(\Delta)\}\geq \min\{(f\wedge g)(x),(f\wedge g)(y),\sup(\Delta)\}$$

ดังนั้น $f\wedge g$ เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S □

ในกรณีที่เราพิจารณา $\Delta=[\gamma,\delta]$ ในทฤษฎีบท ทฤษฎีบท 4.2.2 และใช้บทแทรก 4.2.1 เราจะได้บทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 4.2.2 ถ้า f และ g เป็น $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S แล้ว $f\wedge g$ เป็น $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S

การพิสูจน์ สมมติ f และ g เป็น $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S ดังนั้นโดยบทแทรก 4.2.1 จึงได้ว่า f และ g เป็น $[\gamma,\delta]$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S ฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 4.2.2 ทำให้ได้ว่า $f\wedge g$ เป็น $[\gamma,\delta]$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S และเนื่องจาก $\sup[\gamma,\delta]=\delta$, $\inf[\gamma,\delta]=\gamma$ และ $S[f\wedge g;[\gamma,\delta]]=S$ จึงได้ว่า $f\wedge g$ เป็น $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S ตามต้องการ □

บทตั้ง 4.2.1 ถ้า f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S แล้ว f^Δ เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S ก็ต่อเมื่อ f^Δ เป็นกึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S

การพิสูจน์ ($\Rightarrow$) ให้ $x,y\in S$ จะได้ว่า $xy\in S[f^\Delta;\Delta]$ เนื่องจาก f^Δ เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S จะได้ว่า

$$f^{\Delta}(xy) = \max\{f^{\Delta}(xy), \inf(\Delta)\}$$
$$\geq \min\{f^{\Delta}(x), f^{\Delta}(y), \sup(\Delta)\}$$
$$= \min\{f^{\Delta}(x), f^{\Delta}(y)\}$$

ดังนั้น f^{Δ} เป็นกึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S

($\Leftarrow$) สมมติว่า f^{Δ} เป็นกึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S และให้ $x, y \in S$ ซึ่ง $xy \in S[f^{\Delta};\Delta]$ จะได้ว่า

$$\max\{f^{\Delta}(xy), \inf(\Delta)\} = f^{\Delta}(xy)$$
$$\geq \min\{f^{\Delta}(x), f^{\Delta}(y)\}$$
$$\geq \min\{f^{\Delta}(x), f^{\Delta}(y), \sup(\Delta)\}$$

ดังนั้น f^{Δ} เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S □

ทฤษฎีบทต่อไป เราจะให้เงื่อนไขเพียงพอสำหรับ Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป

ทฤษฎีบท 4.2.3 ถ้า f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S และ f^{Δ} เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S แล้ว f เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S

การพิสูจน์ ให้ $x, y \in S$ และ $xy \in S[f;\Delta]$ จะได้ว่า $xy \in S[f^{\Delta};\Delta]$ และ

$$f^{\Delta}(xy) = \max\{\min\{f(xy), \sup(\Delta)\}, \inf(\Delta)\}$$

เนื่องจาก f^{Δ} เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S และบทตั้ง 4.2.1 จะได้ว่า

$$f^{\Delta}(xy) \geq \min\{f^{\Delta}(x), f^{\Delta}(y)\}$$

ต่อไปเราจะแยกพิจารณาค่าของ $\min\{f^{\Delta}(x), f^{\Delta}(y)\}$ ออกเป็น 2 กรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 ให้ $\min\{f^{\Delta}(x), f^{\Delta}(y)\} = f^{\Delta}(x)$ จะได้ว่า $f^{\Delta}(xy) \geq f^{\Delta}(x)$

ถ้า $x \notin S[f;\Delta]$ จะได้ $f^{\Delta}(x) = \sup(\Delta)$ และทำให้ได้ว่า

$$\max\{f(xy), \inf(\Delta)\} \geq \max\{\min\{f(xy), \sup(\Delta)\}, \inf(\Delta)\}$$

$$= f^{\Delta}(xy)$$

$$\geq f^{\Delta}(x)$$

$$= \sup(\Delta)$$

ฉะนั้น $f(xy) \geq \sup(\Delta)$ และทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\max\{f(xy), \inf(\Delta)\} &= f(xy)\\ &\geq \sup(\Delta)\\ &\geq \min\{f(x), f(y), \sup(\Delta)\}\end{aligned}$$

ถ้า $x \in S[f;\Delta]$ จะได้ว่า $f^{\Delta}(x) = \max\{\min\{f(x), \sup(\Delta)\}, \inf(\Delta)\}$ และจะได้

$$\begin{aligned}\max\{f(xy), \inf(\Delta)\} &\geq \max\{\min\{f(xy), \sup(\Delta)\}, \inf(\Delta)\}\\ &= f^{\Delta}(xy)\\ &\geq f^{\Delta}(x)\\ &= \max\{\min\{f(x), \sup(\Delta)\}, \inf(\Delta)\}\\ &\geq \min\{f(x), \sup(\Delta)\}\\ &\geq \min\{f(x), f(y), \sup(\Delta)\}\end{aligned}$$

กรณีที่ 2 ให้ $\min\{f^{\Delta}(x), f^{\Delta}(y)\} = f^{\Delta}(y)$ เราสามารถพิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 1 ซึ่งทำให้ได้

$$\max\{f(xy), \inf(\Delta)\} \geq \min\{f(x), f(y), \sup(\Delta)\}$$

ดังนั้นจากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 จึงได้ว่า f เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S □

4.3 Δ-ไอดีลวิภัชนัย

ในหัวข้อนี้เราจะแนะนำ Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัย Δ-ไอดีลวิภัชนัย Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยและ Δ-ไอดีลภายในวิภัชนัยของกึ่งกรุปซึ่งเป็นนัยทั่วไปของ $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย, $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลขวาวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลวิภัชนัย, $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยและ $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลภายในวิภัชนัย ตามลำดับ จากนั้นเราจะจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปปกติ กึ่งกรุปปกติภายในและกึ่งกรุปกึ่งเชิงเดียวโดยใช้เซตย่อยวิภัชนัยชนิด Δ

บทนิยาม 4.3.1 กำหนดให้ f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S

(i) จะเรียก f ว่า Δ-**ไอดีลซ้ายวิภัชนัย** (Δ-fuzzy left ideal) ของ S ถ้า f สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$(\forall x, y \in S)(y \in S[f;\Delta] \vee xy \in S[f;\Delta] \rightarrow \max\{f(xy), \inf(\Delta)\} \geq \min\{f(y), \sup(\Delta)\})$$

(ii) จะเรียก f ว่า Δ-**ไอดีลขวาวิภัชนัย** (Δ-fuzzy right ideal) ของ S ถ้า f สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$(\forall x, y \in S)(x \in S[f;\Delta] \vee xy \in S[f;\Delta] \rightarrow \max\{f(xy), \inf(\Delta)\} \geq \min\{f(x), \sup(\Delta)\})$$

(iii) จะเรียก f ว่า Δ-**ไอดีลวิภัชนัย** (Δ-fuzzy ideal) ของ S ถ้า f เป็นทั้ง Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัยและ Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัยของ S

ข้อสังเกต ในกรณีแทน $\Delta = (\gamma, \delta), \Delta = (\gamma, \delta], \Delta = [\gamma, \delta)$ หรือ $\Delta = [\gamma, \delta]$ ในบทนิยาม 4.3.1 เราจะได้บทนิยาม 2.3.8(ii-iv) ทันที

สมบัติ 4.3.1 ถ้า f เป็น Δ-ไอดีลซ้าย(ขวา)วิภัชนัยของกึ่งกรุป S และ Ω เป็นเซตย่อยของ Δ ซึ่งทำให้ได้ $S[f;\Omega] \subseteq S[f;\Delta]$ และ $|\Omega| > 1$ แล้ว f เป็น Ω-ไอดีลซ้าย(ขวา)วิภัชนัยของ S

การพิสูจน์ สมมติว่า f เป็น Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัยของกึ่งกรุป S ให้ $x, y \in S$ ซึ่ง $xy \in S[f;\Omega]$ หรือ $y \in S[f;\Omega]$ จะได้ว่า $xy \in S[f;\Delta]$ หรือ $y \in S[f;\Delta]$ เนื่องจาก $\sup(\Delta) \geq \sup(\Omega)$, $\inf(\Omega) \geq \inf(\Delta)$ และ f เป็น Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัยของของ S จึงทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\max\{f(xy), \inf(\Omega)\} &\geq \max\{f(xy), \inf(\Delta)\} \\ &\geq \min\{f(y), \sup(\Delta)\}\end{aligned}$$

$$\geq \min\{f(y), \sup(\Omega)\}$$

ดังนั้น f เป็น Ω-ไอดีลซ้ายวิภัชนัยของ S

ในกรณี "ถ้า f เป็น Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัยของ S และ Ω เป็นเซตย่อยของ Δ ซึ่งทำให้ได้ $S[f;\Omega] \subseteq S[f;\Delta]$ และ $|\Omega| > 1$ แล้ว f เป็น Ω-ไอดีลขวาวิภัชนัยของ S "นั้น สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

□

ในกรณีที่ $\Delta \subseteq [\gamma, \delta]$ และการใช้สมบัติ 4.3.1 เราพบว่า ทุก $(\in_{\gamma}, \in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-ไอดีลซ้าย(ขวา) วิภัชนัยของกึ่งกรุป S เป็น Δ-ไอดีลซ้าย(ขวา)วิภัชนัยของ S อย่างไรก็ตามบทกลับไม่เป็นจริงซึ่งจะเห็นได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.3.1 กำหนดให้ $\mathbb{N}$ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด ดังนั้น $\mathbb{N}$ เป็นกึ่งกรุปภายใต้การคูณปกติ นิยามเซตย่อยวิภัชนัย f ของ $\mathbb{N}$ โดย

$$f(x) = \begin{cases} 0.2 \ ; \ x \in \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}, \\ 0.4 \ ; \ x \in \{2(2n+1) \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}, \\ 0.3 \ ; \ x \in \{4(2n+1) \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}, \\ 0.5 \ ; \ x \in \{8(2n+1) \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}, \\ 0.9 \ ; \ x \in \{16(2n+1) \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}, \\ 0.8 \ ; \ x \in \{32n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{N}$

ให้ $\Delta = \{0.2, 0.5, 0.6, 0.8\}$ เราพบว่า f เป็น Δ-ไอดีลซ้าย(ขวา)วิภัชนัยของ $\mathbb{N}$ แต่พบว่า f ไม่เป็น $(\in_{0.2}, \in_{0.2} \vee q_{0.8})$-ไอดีลซ้าย(ขวา)วิภัชนัยของ $\mathbb{N}$ เพราะว่า

$$\begin{aligned} \max\{f((2)(2)), 0.2\} &= \max\{f(4), 0.2\} \\ &= 0.3 \\ &< 0.4 \\ &= \min\{f(2), 0\} \end{aligned}$$

□

ในสมบัติต่อไป เราจะพิจารณาความสัมพันธ์บางประการระหว่าง ไอดีลซ้าย(ขวา) และ Δ-ไอดีลซ้าย(ขวา)วิภัชนัยของกึ่งกรุป

สมบัติ 4.3.2 ให้ A เป็นเซตย่อยของกึ่งกรุป S ที่ไม่ใช่เซตว่าง จะได้ว่า A เป็นไอดีลซ้าย(ขวา)ของ S ก็ต่อเมื่อ C_A เป็น Δ-ไอดีลซ้าย(ขวา)วิภัชนัยของ S

การพิสูจน์ ($\Rightarrow$) สมมติว่า A เป็นไอดีลซ้ายของ S และให้ $\sup(\Delta)=\delta$ และ $\inf(\Delta)=\gamma$ ดังนั้น โดยสมบัติ 2.3.3 (ii) จึงทำให้ได้ว่า C_A เป็น $(\in_\gamma,\in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลซ้ายวิภัชนัยของ S นั่นคือ C_A เป็น $[\gamma,\delta]$-ไอดีลซ้ายวิภัชนัยของ S เนื่องจาก $|\Delta|>1$, $\Delta\subseteq[\gamma,\delta]$, $S[C_A;\Delta]\subseteq S[C_A;[\gamma,\delta]]$ และโดยสมบัติ 4.3.1 จึงได้ว่า C_A เป็น Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัยของ S

ในกรณี "ถ้า A เป็นไอดีลขวาของ S แล้ว C_A เป็น Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัยของ S" นั้น สามารถพิสูจน์ได้ทำนองเดียวกัน

($\Leftarrow$) สมมติว่า C_A เป็น Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัยของ S ให้ $a\in A$ และ $s\in S$ จะได้ว่า $C_A(a)=1$ และ $sa\in S=S[C_A;\Delta]$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned}(C_A)_\Delta(sa) &= \min\{\max\{C_A(sa),\inf(\Delta)\},\sup(\Delta)\}\\ &\geq \min\{\min\{C_A(a),\sup(\Delta)\},\sup(\Delta)\}\\ &= \min\{1,\sup(\Delta)\}\\ &= \sup(\Delta)\end{aligned}$$

โดยใช้สมบัติ 4.2.3 จึงทำให้ได้ว่า $sa\in A$ ดังนั้น A เป็นไอดีลซ้ายของ S

ในกรณี "ถ้า C_A เป็น Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัยของ S แล้ว A เป็นไอดีลขวาของ S" นั้น สามารถพิสูจน์ได้ทำนองเดียวกัน □

สมบัติ 4.3.3 ให้ f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

(i) ถ้า f เป็น Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัยของ S แล้ว $C_S\circ f\leq_\Delta f$

(ii) ถ้า f เป็น Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัยของ S แล้ว $f\circ C_S\leq_\Delta f$

การพิสูจน์ (i) สมมติว่ามี $x\in S[f;\Delta]$ ซึ่งทำให้ได้

$$\min\{(C_S\circ f)(x),\sup(\Delta)\}>\max\{f(x),\inf(\Delta)\}$$

จะได้ว่ามี $a,b\in S$ ซึ่งทำให้ได้ $x=ab$ และ

$$\min\{f(b),\sup(\Delta)\}>\max\{f(x),\inf(\Delta)\}$$

เนื่องจาก f เป็น Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัยของ S จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\max\{f(x),\inf(\Delta)\} &= \max\{f(ab),\inf(\Delta)\}\\ &\geq \min\{f(b),\sup(\Delta)\}\\ &> \max\{f(x),\inf(\Delta)\}\end{aligned}$$

เราพบว่าเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $C_S \circ f \leq_\Delta f$

สำหรับการพิสูจน์ (ii) สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับ (i) □

ต่อไปจะแนะนำโครงสร้างที่เป็นนัยทั่วไปของ $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยของกึ่งกรุป

บทนิยาม 4.3.2 ให้ f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S จะเรียก f ว่า **Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัย** (Δ-fuzzy quasi-ideal) ของ S ถ้า $(C_S \circ f) \wedge (f \circ C_S) \leq_\Delta f$

ข้อสังเกต ในกรณีแทน $\Delta = (\gamma,\delta), \Delta = (\gamma,\delta], \Delta = [\gamma,\delta)$ หรือ $\Delta = [\gamma,\delta]$ ในบทนิยาม 4.3.2 เราจะได้รับบทนิยาม 2.3.8(v) ทันที

จากบทนิยาม 4.3.1 และบทนิยาม 4.3.2 เราพบว่า ทุก Δ-ไอดีลซ้าย(ขวา)วิภัชนัยของกึ่งกรุปเป็น Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัย แต่บทกลับไม่เป็นจริงโดยเห็นได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.3.2 ให้ $S = \{0,a,b,c\}$ เป็นกึ่งกรุปภายใต้การดำเนินการทวิภาค "•" ดังนี้

•	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	b	0
b	0	0	0	0
c	0	c	0	0

ให้ f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของ S ที่นิยามโดย

$$f(0)=0.9,\ f(a)=0.5,\ f(b)=0.4 \text{ และ } f(c)=0.2$$

และกำหนดให้ $\Delta = \{0.2, 0.5, 0.9\}$ จะพบว่า f เป็น Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยของ S แต่ f ไม่เป็น Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัยของ S เพราะว่า $a \in S[f;\Delta]$ และ

$$\begin{aligned}\max\{f(ca),0.2\} &= \max\{f(c),0.2\}\\ &= 0.2\\ &< 0.5\\ &= \min\{f(a),0.9\}\end{aligned}$$

ให้ g เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของ S ที่นิยามโดย

$$g(0)=0.7,\ g(a)=0.6,\ g(b)=0.3 \text{ และ } g(c)=0.1$$

กำหนดให้ $\Delta=\{0.1,0.3,0.6,0.7\}$ จะพบว่า g เป็น Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยของ S แต่ g ไม่เป็น Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัยของ S เพราะว่า $a,b,ab\in S[g;\Delta]$ และ

$$\begin{aligned}\max\{g(ab),0.1\} &= \max\{g(b),0.1\}\\ &= 0.3\\ &< 0.6\\ &= \min\{g(a),0.7\}\end{aligned}$$

□

สมบัติ 4.3.4 ถ้า f เป็น Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยของกึ่งกรุป S และ Ω เป็นเซตย่อยของ Δ ซึ่งทำให้ได้ $S[f;\Omega]\subseteq S[f;\Delta]$ และ $|\Omega|>1$ แล้ว f เป็น Ω-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยของ S

การพิสูจน์ ให้ $x\in S[f;\Omega]$ จะได้ว่า $x\in S[f;\Delta]$ และเนื่องจาก f เป็น Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยของ S จึงทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\max\{f(x),\inf(\Omega)\} &\geq \max\{f(x),\inf(\Delta)\}\\ &\geq \min\{(f\circ C_S\wedge C_S\circ f)(x),\sup(\Delta)\}\\ &\geq \min\{(f\circ C_S\wedge C_S\circ f)(x),\sup(\Omega)\}\end{aligned}$$

ดังนั้น f เป็น Ω-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยของ S

□

ในกรณีที่ $\Delta\subseteq[\gamma,\delta]$ และการใช้สมบัติ 4.3.4 เราพบว่า ทุก $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยของกึ่งกรุป S เป็น Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยของ S อย่างไรก็ตามบทกลับไม่เป็นจริงซึ่งจะเห็นได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.3.3 ให้ $S=\{0,a,b,c\}$ เป็นกึ่งกรุปภายใต้การดำเนินการทวิภาค "$\bullet$" ดังนี้

$\bullet$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	0	0	0
b	0	0	0	a
c	0	0	a	b

ให้ f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของ S ที่นิยามโดย

$$f(0)=0.7,\ f(a)=0.6,\ f(b)=0.3 \text{ และ } f(c)=0.5$$

และกำหนดให้ $\Delta=\{0.2,0.5,0.6,0.7\}$ จะพบว่า f เป็น Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยของ S แต่ไม่เป็น $(\in_{0.2},\in_{0.2}\vee q_{0.7})$-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยของ S เพราะว่า

$$\begin{aligned}((f*C_S)\wedge(C_S*f))(b) &= \min\{(f*C_S)(b),(C_S*f)(b)\}\\ &= 0.5\\ &> 0.3\\ &= f^*(b)\end{aligned}$$

□

ในสมบัติต่อไป เราจะพิจารณาความสัมพันธ์บางประการระหว่าง ควอซี-ไอดีลและ Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยของกึ่งกรุป

สมบัติ 4.3.5 ให้ Q เป็นเซตย่อยของกึ่งกรุป S ที่ไม่ใช่เซตว่าง จะได้ว่า Q เป็นควอซี-ไอดีลของ S ก็ต่อเมื่อ C_Q เป็น Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยของ S

การพิสูจน์ $(\Rightarrow)$ กำหนดให้ $\sup(\Delta)=\delta$ และ $\inf(\Delta)=\gamma$ ดังนั้นโดยสมบัติ 2.3.3(vi) จึงได้ว่า C_Q เป็น $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยของ S นั่นคือ C_Q เป็น $[\gamma,\delta]$-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยของ S เนื่องจาก $|\Delta|>1$, $\Delta\subseteq[\gamma,\delta]$, $S[C_Q;\Delta]\subseteq S[C_Q;[\gamma,\delta]]$ และโดยสมบัติ 4.3.3 จึงได้ว่า C_Q เป็น Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยของ S

$(\Leftarrow)$ ให้ $x\in QS\cap SQ$ จะได้ว่า $x\in S[C_Q;\Delta]$ และโดยใช้ สมบัติ 2.3.1 จะได้ว่า

$$(C_Q\circ C_S\wedge C_S\circ C_Q)(x)=(C_{QS}\wedge C_{SQ})(x)=(C_{QS\cap SQ})(x)=1$$

ฉะนั้น

$$\begin{aligned}\max\{C_Q(x),\inf(\Delta)\} &\geq \min\{(C_Q\circ C_S \wedge C_S\circ C_Q)(x),\sup(\Delta)\}\\ &\geq \min\{1,\sup(\Delta)\}\\ &= \sup(\Delta)\end{aligned}$$

โดยสมบัติ 4.2.3 จะได้ว่า $x\in Q$ ดังนั้น Q เป็นควอซี-ไอดีลของ S □

ต่อไปจะแนะนำโครงสร้างที่เป็นนัยทั่วไปของ $(\in_\gamma,\in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลภายในวิภัชนัยของกึ่งกรุป

บทนิยาม 4.3.3 .ให้ f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S จะเรียก f ว่า **Δ-ไอดีลภายในวิภัชนัย** (Δ-fuzzy interior ideal) ของ S ถ้า f สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$(\forall x,y,z\in S)(y\in S[f;\Delta]\ \wedge xyz\in S[f;\Delta]\rightarrow \max\{f(xyz),\inf(\Delta)\}\geq\min\{f(y),\sup(\Delta)\})$

ข้อสังเกต ในกรณีแทน $\Delta=(\gamma,\delta),\Delta=(\gamma,\delta],\Delta=[\gamma,\delta)$ หรือ $\Delta=[\gamma,\delta]$ ในบทนิยาม 4.3.3 เราจะได้บทนิยาม 2.3.8(vi) ทันที

จากบทนิยาม 4.3.1 และบทนิยาม 4.3.3 เราพบว่า ทุก Δ-ไอดีลวิภัชนัยของกึ่งกรุปเป็น Δ-ไอดีลภายในวิภัชนัย แต่บทกลับไม่เป็นจริงโดยเห็นได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.3.4 ให้ $S=\{0,a,b,c\}$ เป็นกึ่งกรุปภายใต้การดำเนินการทวิภาค "•" ดังนี้

•	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	0	0	0
b	0	0	a	0
c	0	0	a	a

ให้ f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของ S ที่นิยามโดย

$$f(0)=0.7,\ f(a)=0.6,\ f(b)=0.9 \text{ และ } f(c)=0.3$$

กำหนดให้ $\Delta=\{0.3,0.4,0.6,0.7\}$ จะพบว่า f เป็น Δ-ไอดีลภายในวิภัชนัยของ S แต่ไม่เป็น Δ-ไอดีลวิภัชนัยของ S เพราะว่า $a\in S[f;\Delta]$ และ

$$\begin{aligned}\max\{g(cb),0.3\} &= \max\{g(a),0.3\}\\ &= 0.6\\ &< 0.7\\ &= \min\{g(b),0.7\}\end{aligned}$$

□

สมบัติ 4.3.6 ถ้า f เป็น Δ-ไอดีลภายในวิภัชนัยของกึ่งกรุป S และ Ω เป็นเซตย่อยของ Δ ซึ่งทำให้ได้ $S[f;\Omega]\subseteq S[f;\Delta]$ และ $|\Omega|>1$ แล้ว f เป็น Ω-ไอดีลภายในวิภัชนัยของ S

การพิสูจน์ ให้ $x,y,z\in S$ ซึ่ง $xyz\in S[f;\Omega]$ หรือ $y\in S[f;\Omega]$ จะได้ว่า $xyz\in S[f;\Delta]$ หรือ $y\in S[f;\Delta]$ เนื่องจาก $\sup(\Delta)\geq\sup(\Omega)$, $\inf(\Omega)\geq\inf(\Delta)$ และ f เป็น Δ-ไอดีลภายในวิภัชนัยของ S จึงทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\max\{f(xyz),\inf(\Omega)\} &\geq \max\{f(xyz),\inf(\Delta)\}\\ &\geq \min\{f(y),\sup(\Delta)\}\\ &\geq \min\{f(y),\sup(\Omega)\}\end{aligned}$$

ดังนั้น f เป็น Ω-ไอดีลภายในวิภัชนัยของ S

□

ในกรณีที่ $\Delta\subseteq[\gamma,\delta]$ และการใช้สมบัติ 4.3.6 เราพบว่า ทุก $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$-ไอดีลภายในวิภัชนัยของกึ่งกรุป S เป็น Δ-ไอดีลภายในวิภัชนัยของ S อย่างไรก็ตามบทกลับไม่เป็นจริงซึ่งจะเห็นได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.3.5 กำหนดให้ $\mathbb{N}$ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด ดังนั้น $\mathbb{N}$ เป็นกึ่งกรุปภายใต้การคูณปกติ นิยามเซตย่อยวิภัชนัย f ของ $\mathbb{N}$ โดย

$$f(x)=\begin{cases}0.3 \ ; & x\in\{1,3,5,\ldots\}\\ 0.6 \ ; & x=2\\ 0.5 \ ; & x=4\\ 0.8 \ ; & x\in\{6,8,10,\ldots\}\end{cases}$$

สำหรับทุกๆ $x\in\mathbb{N}$

ให้ $\Delta=\{0.3,0.8\}$ เราพบว่า f เป็น Δ-ไอดีลภายในวิภัชนัยของ $\mathbb{N}$ แต่พบว่า f ไม่เป็น $(\in_{0.3},\in_{0.3}\vee q_{0.8})$-ไอดีลภายในวิภัชนัยของ $\mathbb{N}$ เพราะว่า

$$\begin{aligned} \max\{f((1)(2)(2)),0.3\} &= \max\{f(4),0.3\} \\ &= 0.5 \\ &< 0.6 \\ &= \min\{f(2),0.8\} \end{aligned}$$ □

ในสมบัติต่อไป เราจะพิจารณาความสัมพันธ์บางประการระหว่างไอดีลภายในและ Δ-ไอดีล-ภายในวิภัชนัยของกึ่งกรุป

สมบัติ 4.3.7 ให้ I เป็นเซตย่อยของกึ่งกรุป S ที่ไม่ใช่เซตว่าง จะได้ว่า I เป็นไอดีลภายในของ S ก็ต่อเมื่อ C_I เป็น Δ-ไอดีลภายในวิภัชนัยของ S

การพิสูจน์ ($\Rightarrow$) กำหนดให้ $\sup(\Delta)=\delta$ และ $\inf(\Delta)=\gamma$ ดังนั้นโดยสมบัติ 2.3.3 (v) จึงได้ว่า C_I เป็น $(\in_\gamma,\in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลภายในวิภัชนัยของ S นั่นคือ C_I เป็น $[\gamma,\delta]$-ไอดีลภายในวิภัชนัยของ S เนื่องจาก $|\Delta|>1$, $\Delta\subseteq[\gamma,\delta], S[C_A;\Delta]\subseteq S[C_A;[\gamma,\delta]]$ และโดยสมบัติ 4.3.6 จึงได้ว่า C_I เป็น Δ-ไอดีลภายในวิภัชนัยของ S

($\Leftarrow$) ให้ $a\in I$ และ $x,y\in S$ จะได้ว่า $C_I(a)=1$ และ $xay\in S[C_I;\Delta]$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} (C_I)_\Delta(xay) &= \min\{\max\{C_I(xay),\inf(\Delta)\},\sup(\Delta)\} \\ &\geq \min\{\min\{C_I(a),\sup(\Delta)\},\sup(\Delta)\} \\ &= \min\{1,\sup(\Delta)\} \\ &= \sup(\Delta) \end{aligned}$$

โดยใช้สมบัติ 4.2.3 จึงทำให้ได้ว่า $xay\in I$ ดังนั้น I เป็นไอดีลภายในของ S □

ในทฤษฎีบทต่อไป เราจะจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปปกติโดย Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัยและ Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัย

ทฤษฎีบท 4.3.1 ให้ S เป็นกึ่งกรุป เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) S เป็นกึ่งกรุปปกติ

(ii) $f\circ g=_\Delta f\wedge g$ สำหรับทุก Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัย f และ Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย g ของ S

การพิสูจน์ (i)$\Rightarrow$ (ii) ให้ f เป็น Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัย, g เป็น Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัยของ S และ $x \in S[f \wedge g;\Delta]$ สมมติว่า $(f \wedge g)(x) = f(x)$ ทำให้ได้ว่า $x \in S[f;\Delta]$ และจากสมมติฐาน (i) จะได้ว่า $x = xax$ สำหรับบาง $a \in S$ จาก f เป็น Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัยของ S และสมบัติ 4.3.3 ทำให้ได้ว่า $f \circ C_S \leq_\Delta f$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\max\{(f \wedge g)(x), \inf(\Delta)\} &= \max\{f(x), \inf(\Delta)\}\\ &\geq \min\{(f \circ C_S)(x), \sup(\Delta)\}\\ &\geq \min\{(f \circ g)(x), \sup(\Delta)\}\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\max\{(f \circ g)(x), \inf(\Delta)\} &\geq \max\{\min\{f(xa), g(x)\}, \inf(\Delta)\}\\ &= \min\{\max\{f(xa), \inf(\Delta)\}, \max\{g(x), \inf(\Delta)\}\}\\ &\geq \min\{\min\{f(x), \sup(\Delta)\}, g(x)\}\\ &\geq \min\{(f \wedge g)(x), \sup(\Delta)\}\end{aligned}$$

ต่อไปเราจะแยกพิจารณาค่า $f(x)$ ออกเป็น 3 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ให้ $f(x) \leq \inf(\Delta)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\inf(\Delta) &= \max\{(f \wedge g)(x), \inf(\Delta)\}\\ &\geq \min\{(f \circ g)(x), \sup(\Delta)\}\end{aligned}$$

และทำให้ได้ว่า $(f \circ g)(x) \leq \inf(\Delta)$ ดังนั้น $(f \circ g)_\Delta(x) = (f \wedge g)_\Delta(x)$

กรณีที่ 2 ให้ $f(x) \geq \sup(\Delta)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\max\{(f \circ g)(x), \inf(\Delta)\} &\geq \min\{(f \wedge g)(x), \sup(\Delta)\}\\ &= \sup(\Delta)\end{aligned}$$

และทำให้ได้ว่า $(f \circ g)(x) \geq \sup(\Delta)$ ดังนั้น $(f \circ g)_\Delta(x) = (f \wedge g)_\Delta(x)$

กรณีที่ 3 ให้ $\inf(\Delta) < f(x) < \sup(\Delta)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\max\{(f \circ g)(x), \inf(\Delta)\} &\geq \min\{(f \wedge g)(x), \sup(\Delta)\}\\ &= (f \wedge g)(x)\\ &= \max\{(f \wedge g)(x), \inf(\Delta)\}\\ &\geq \min\{(f \circ g)(x), \sup(\Delta)\}\end{aligned}$$

ดังนั้น $(f \circ g)(x) = (f \wedge g)(x)$ และทำให้ได้ว่า $(f \circ g)_\Delta(x) = (f \wedge g)_\Delta(x)$

จากการพิจารณากรณีที่ 1-3 สามารถสรุปได้ว่า “ถ้า $(f \wedge g)(x) = f(x)$ แล้ว $(f \circ g)_\Delta(x) = (f \wedge g)_\Delta(x)$ ” เป็นจริง ในกรณี $(f \wedge g)(x) = g(x)$ เราสามารถพิสูจน์ได้เช่นเดียวกันกับ $(f \wedge g)(x) = f(x)$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $(f \circ g)_\Delta(x) = (f \wedge g)_\Delta(x)$

ดังนั้นเราสามารถสรุปได้ว่า $f \circ g =_\Delta f \wedge g$ สำหรับทุก Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัย f และ Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย g ของ S

(ii)$\Rightarrow$ (i) ให้ L เป็นไอดีลซ้ายและ R เป็นไอดีลขวาของ S โดยสมบัติ 4.3.2 ทำให้ได้ว่า C_R เป็น Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัยและ C_L เป็น Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัยของ S โดยใช้สมมติฐาน (ii) และสมบัติ 2.3.1 จะได้ว่า

$$C_{RL} = C_R \circ C_L =_\Delta C_R \wedge C_L = C_{R \cap L}$$

โดยสมบัติ 4.2.4 เราจะได้ว่า $RL = R \cap L$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.2.1 จะได้ S เป็นกึ่งกรุปปกติ □

เมื่อเราพิจารณากรณีที่ $\Delta = (\gamma, \delta), \Delta = (\gamma, \delta], \Delta = [\gamma, \delta)$ หรือ $\Delta = [\gamma, \delta]$ ในทฤษฎีบท 4.3.1 เราจะได้ทฤษฎีบท 2.3.1 ทันที

ต่อไปเราจะให้ลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปปกติโดย Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัย

ทฤษฎีบท 4.3.2 ให้ S เป็นกึ่งกรุป เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) S เป็นกึ่งกรุปปกติ

(ii) $f \circ C_S \circ f =_\Delta f$ สำหรับทุก Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัย f ของ S

การพิสูจน์ (i)$\Rightarrow$ (ii) ให้ f เป็น Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยของ S และ $x \in S[f;\Delta]$

โดยสมมติฐาน (i) ได้ว่า $x = xax$ สำหรับบาง $a \in S$ และทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\max\{f(x), \inf(\Delta)\} &\geq \min\{(f \circ C_S \wedge C_S \circ f)(x), \sup(\Delta)\} \\
&\geq \min\{(f \circ C_S \circ f)(x), \sup(\Delta)\} \\
&\geq \min\{\min\{f(x), C_S(a), f(x)\}, \sup(\Delta)\} \\
&\geq \min\{f(x), \sup(\Delta)\}
\end{aligned}$$

เราจะพิจารณาค่า $f(x)$ ออกเป็น 3 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ให้ $\inf(\Delta) \geq f(x)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\inf(\Delta) &= \max\{f(x), \inf(\Delta)\} \\
&\geq \min\{(f \circ C_S \circ f)(x), \sup(\Delta)\}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\inf(\Delta) \geq (f \circ C_S \circ f)(x)$ และทำให้ได้ว่า

$$f_\Delta(x) = \inf(\Delta) = (f \circ C_S \circ f)_\Delta(x)$$

กรณีที่ 2 ให้ $f(x) \geq \sup(\Delta)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(f \circ C_S \circ f)(x) &\geq \min\{(f \circ C_S \circ f)(x), \sup(\Delta)\} \\ &\geq \min\{f(x), \sup(\Delta)\} \\ &= \sup(\Delta)\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $(f \circ C_S \circ f)(x) \geq \sup(\Delta)$ และทำให้ได้ว่า

$$f_\Delta(x) = \sup(\Delta) = (f \circ C_S \circ f)_\Delta(x)$$

กรณีที่ 3 ให้ $\sup(\Delta) > f(x) > \inf(\Delta)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}f(x) &= \max\{f(x), \inf(\Delta)\} \\ &\geq \min\{(f \circ C_S \circ f)(x), \sup(\Delta)\}\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}(f \circ C_S \circ f)(x) &\geq \min\{(f \circ C_S \circ f)(x), \sup(\Delta)\} \\ &\geq \min\{f(x), \sup(\Delta)\} \\ &= f(x)\end{aligned}$$

จึงทำให้ได้ว่า $f(x) = (f \circ C_S \circ f)(x)$ และจะได้ว่า $f_\Delta(x) = (f \circ C_S \circ f)_\Delta(x)$

จากการพิจารณากรณีที่ 1-3 สามารถสรุปได้ว่า $f_\Delta(x) = (f \circ C_S \circ f)_\Delta(x)$

ดังนั้น $f \circ C_S \circ f =_\Delta f$

(ii)$\Rightarrow$ (i) ให้ Q เป็นควอซี-ไอดีลของ S และโดยสมบัติ 4.3.5 จึงทำให้ได้ว่า C_Q เป็น Δ -ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยของ S ดังนั้นโดยสมมติฐาน (ii) และสมบัติ 2.3.1 จึงทำให้ได้ว่า

$$C_{QSQ} = C_Q \circ C_S \circ C_Q =_\Delta C_Q$$

โดยสมบัติ 4.2.4 ทำให้ได้ว่า $QSQ = Q$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.2.1 จึงสรุปได้ว่า S เป็นกึ่งกรุปปกติ□

เมื่อเราพิจารณากรณีที่ $\Delta = (\gamma, \delta), \Delta = (\gamma, \delta], \Delta = [\gamma, \delta)$ หรือ $\Delta = [\gamma, \delta]$ ในทฤษฎีบท 4.3.2 เราจะได้ทฤษฎีบท 2.3.2(i. $\Leftrightarrow$ iv) ทันที

บทนิยาม 4.3.4 ให้ f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S จะเรียก f ว่า **Δ-เซตย่อยกึ่งเฉพาะวิภัชนัย** (Δ-fuzzy semiprime subset) ของ S ถ้า

$$(\forall x \in S)(x \in S[f;\Delta] \vee x^2 \in S[f;\Delta] \rightarrow \max\{f(x), \inf(\Delta)\} \geq \min\{f(x^2), \sup(\Delta)\})$$

ทฤษฎีบทต่อไป เราจะกล่าวถึงลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปปกติภายในโดย Δ-ไอดีลวิภัชนัย

ทฤษฎีบท 4.3.3 ให้ S เป็นกึ่งกรุป เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) S เป็นกึ่งกรุปปกติภายใน

(ii) ทุก Δ-ไอดีลวิภัชนัยของ S เป็น Δ-เซตย่อยกึ่งเฉพาะวิภัชนัย

(iii) $f_\Delta(x) = f_\Delta(x^2)$ สำหรับทุก Δ-ไอดีลวิภัชนัย f ของ S และสำหรับทุกๆ $x \in S$

การพิสูจน์ (i)$\Rightarrow$(ii) ให้ f เป็น Δ-ไอดีลวิภัชนัยของ S และ $x \in S$ ซึ่งทำให้ได้ $x \in S[f;\Delta]$ หรือ $x^2 \in S[f;\Delta]$ จากสมมติฐาน (i) จึงทำให้ได้ว่า $x = ax^2b$ สำหรับบาง $a,b \in S$ ต่อไปเราจะพิจารณากรณีที่ $x \in S[f;\Delta]$ ด้วยการแยกพิจารณาค่า $f(x)$ ออกเป็น 3 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ให้ $\inf(\Delta) \geq f(x)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\inf(\Delta) &= \max\{f(x), \inf(\Delta)\}\\ &= \max\{f(ax^2b), \inf(\Delta)\}\\ &\geq \min\{f(ax^2), \sup(\Delta)\}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\inf(\Delta) \geq f(ax^2)$ และทำให้ได้ว่า $ax^2 \in S[f;\Delta]$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\max\{f(x), \inf(\Delta)\} &= \inf(\Delta)\\ &= \max\{f(ax^2), \inf(\Delta)\}\\ &\geq \min\{f(x^2), \sup(\Delta)\}\end{aligned}$$

กรณีที่ 2 ให้ $f(x) \geq \sup(\Delta)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\max\{f(x), \inf(\Delta)\} &= f(x)\\ &\geq \sup(\Delta)\\ &\geq \min\{f(x^2), \sup(\Delta)\}\end{aligned}$$

กรณีที่ 3 ให้ $\sup(\Delta) > f(x) > \inf(\Delta)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\max\{f(ax^2), \inf(\Delta)\} &\geq \min\{f(x), \sup(\Delta)\}\\ &= \max\{f(ax^2b), \inf(\Delta)\}\\ &\geq \min\{f(ax^2), \sup(\Delta)\}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $f(ax^2) = f(x)$ จึงทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\max\{f(x),\inf(\Delta)\} &= \max\{f(ax^2),\inf(\Delta)\}\\ &\geq \min\{f(x^2),\sup(\Delta)\}\end{aligned}$$

จากการพิจารณากรณีที่ 1-3 สามารถสรุปได้ว่า

$$\max\{f(x),\inf(\Delta)\} \geq \min\{f(x^2),\sup(\Delta)\}$$

ในกรณี $x^2 \in S[f;\Delta]$ เราสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับกรณี $x \in S[f;\Delta]$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\max\{f(x),\inf(\Delta)\} \geq \min\{f(x^2),\sup(\Delta)\}$$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า f เป็น Δ-เซตย่อยกึ่งเฉพาะวิภัชนัยของ S

(ii) $\Rightarrow$ (iii) ให้ $x \in S$ ในกรณีที่ $x, x^2 \notin S[f;\Delta]$ ทำให้ได้ว่า $f_\Delta(x) = f_\Delta(x^2)$ ต่อไปสมมติว่า $x \in S[f;\Delta]$ หรือ $x^2 \in S[f;\Delta]$ เนื่องจาก f เป็น Δ-ไอดีลวิภัชนัยและ Δ-เซตย่อยกึ่งเฉพาะวิภัชนัยของ S จะได้ว่า

$$\max\{f(x),\inf(\Delta)\} \geq \min\{f(x^2),\sup(\Delta)\}$$

และ

$$\max\{f(x^2),\inf(\Delta)\} \geq \min\{f(x),\sup(\Delta)\}$$

ต่อไปเราจะพิจารณากรณีที่ $x \in S[f;\Delta]$ ด้วยการแยกพิจารณาค่า $f(x)$ ออกเป็น 3 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ให้ $\inf(\Delta) \geq f(x)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\inf(\Delta) &= \max\{f(x),\inf(\Delta)\}\\ &\geq \min\{f(x^2),\sup(\Delta)\}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\inf(\Delta) \geq f(x^2)$ และทำให้ได้ว่า $f_\Delta(x) = \inf(\Delta) = f_\Delta(x^2)$

กรณีที่ 2 ให้ $f(x) \geq \sup(\Delta)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\max\{f(x^2),\inf(\Delta)\} &\geq \min\{f(x),\sup(\Delta)\}\\ &= \sup(\Delta)\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $f(x) \geq \sup(\Delta)$ และทำให้ได้ว่า $f_\Delta(x) = \sup(\Delta) = f_\Delta(x^2)$

กรณีที่ 3 ให้ $\sup(\Delta) > f(x) > \inf(\Delta)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\max\{f(x^2),\inf(\Delta)\} &\geq \min\{f(x),\sup(\Delta)\}\\ &= f(x)\\ &= \max\{f(x),\inf(\Delta)\}\\ &\geq \min\{f(x^2),\sup(\Delta)\}\end{aligned}$$

ดังนั้น $f(x)=f(x^2)$ และทำให้ได้ว่า $f_\Delta(x)=f_\Delta(x^2)$

จากการพิจารณากรณีที่ 1-3 สามารถสรุปได้ว่า $f_\Delta(x)=f_\Delta(x^2)$ ในกรณี $x^2\in S[f;\Delta]$ เราสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับกรณี $x\in S[f;\Delta]$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $f_\Delta(x)=f_\Delta(x^2)$ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $f_\Delta(x)=f_\Delta(x^2)$ เมื่อ $x\in S[f;\Delta]$ หรือ $x^2\in S[f;\Delta]$

(iii) $\Rightarrow$ (i) ให้ L เป็นไอดีลซ้ายและ R เป็นไอดีลขวาของ S จะได้ว่า LR เป็นไอดีลและโดยใช้สมบัติ 4.3.2 เราจะพบ C_{LR} เป็น Δ-ไอดีลวิภัชนัยของ S ดังนั้นโดยสมมติฐาน (iii) ทำให้ได้

$$(C_{LR})_\Delta(x)=(C_{LR})_\Delta(x^2)=\sup(\Delta) \text{ สำหรับทุกๆ } x\in L\cap R$$

เพราะฉะนั้น $L\cap R\subseteq LR$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.2.2 จึงสรุปได้ว่า S เป็นกึ่งกรุปปกติภายใน □

เมื่อเราพิจารณากรณีที่ $\Delta=(\gamma,\delta),\Delta=(\gamma,\delta],\Delta=[\gamma,\delta)$ หรือ $\Delta=[\gamma,\delta]$ ในทฤษฎีบท 4.3.3 เราจะได้บทแทรกดังต่อไปนี้

บทแทรก 4.3.1 ให้ S เป็นกึ่งกรุป เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) S เป็นกึ่งกรุปปกติภายใน

(ii) $f^*(x)=f^*(x^2)$ สำหรับทุกๆ $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$-ไอดีลวิภัชนัย f ของ S และสำหรับทุกๆ $x\in S$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\Delta=[\gamma,\delta]$ จะได้ว่า f เป็น $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$-ไอดีลวิภัชนัยของ S ก็ต่อเมื่อ f เป็น Δ-ไอดีลวิภัชนัยของ S ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.3.3 จึงทำให้บทแทรก 4.3.1 เป็นจริง □

ทฤษฎีบทต่อไป เราจะกล่าวถึงการจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปกึ่งเชิงเดียวโดยใช้ Δ-ไอดีลวิภัชนัย

ทฤษฎีบท 4.3.4 กำหนดให้ S เป็นกึ่งกรุป เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) S เป็นกึ่งกรุปกึ่งเชิงเดียว

(ii) $f\circ f=_\Delta f$ สำหรับทุก Δ-ไอดีลวิภัชนัย f ของ S

การพิสูจน์ (i) $\Rightarrow$ (ii) ให้ f เป็น Δ-ไอดีลวิภัชนัยของ S และ $x\in S[f;\Delta]$ โดยสมมติฐาน (i) และทฤษฎีบท 2.2.3 จึงทำให้ได้ว่า $x=(axb)(cxd)$ สำหรับบาง $a,b,c,d\in S$ เนื่องจาก f เป็น Δ-ไอดีลวิภัชนัยของ S และสมบัติ 4.3.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\max\{f(x),\inf(\Delta)\} &\geq \min\{(f\circ C_S)(x),\sup(\Delta)\}\\ &\geq \min\{(f\circ f)(x),\sup(\Delta)\}\end{aligned}$$

และ

$$\max\{(f\circ f)(x),\inf(\Delta)\}\geq \max\{\min\{f(axb),f(cxd)\},\inf(\Delta)\}$$

$$= \min\{\max\{f(axb), \inf(\Delta)\}, \max\{f(cxd), \inf(\Delta)\}\}$$
$$\geq \min\{f(x), \sup(\Delta)\}$$

ต่อไปเราจะแยกพิจารณาค่า $f(x)$ ออกเป็น 3 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ให้ $\inf(\Delta) \geq f(x)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\inf(\Delta) &= \max\{f(x), \inf(\Delta)\} \\ &\geq \min\{(f \circ f)(x), \sup(\Delta)\}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\inf(\Delta) \geq (f \circ f)(x)$ ทำให้ได้ว่า $f_\Delta(x) = (f \circ f)_\Delta(x)$

กรณีที่ 2 ให้ $f(x) \geq \sup(\Delta)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\max\{(f \circ f)(x), \inf(\Delta)\} &\geq \min\{f(x), \sup(\Delta)\} \\ &= \sup(\Delta)\end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $(f \circ f)(x) \geq \sup(\Delta)$ ดังนั้น $f_\Delta(x) = (f \circ f)_\Delta(x)$

กรณีที่ 3 ให้ $\sup(\Delta) > f(x) > \inf(\Delta)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\max\{(f \circ f)(x), \inf(\Delta)\} &\geq \min\{f(x), \sup(\Delta)\} \\ &= f(x) \\ &= \max\{f(x), \inf(\Delta)\} \\ &\geq \min\{(f \circ f)(x), \sup(\Delta)\}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $(f \circ f)(x) = f(x)$ ทำให้ได้ว่า $(f \circ f)_\Delta(x) = f_\Delta(x)$

จากการพิจารณากรณีที่ 1-3 จึงสรุปได้ว่า $(f \circ f)_\Delta(x) = f_\Delta(x)$ ดังนั้น $f \circ f =_\Delta f$

(ii)$\Rightarrow$ (i) ให้ I เป็นไอดีลของ S โดยสมบัติ 4.3.2 จะได้ C_I เป็น Δ-ไอดีลวิภัชนัยของ S ดังนั้นโดยสมมติฐาน (ii) และสมบัติ 2.3.1 จึงทำให้ได้ว่า

$$C_{I^2} = C_I \circ C_I =_\Delta C_I$$

โดยสมบัติ 4.2.4 จะได้ว่า $I^2 = I$ ดังนั้น S เป็นกึ่งกรุปกึ่งเชิงเดียว □

เมื่อเราพิจารณากรณีที่ $\Delta = (\gamma, \delta), \Delta = (\gamma, \delta], \Delta = [\gamma, \delta)$ หรือ $\Delta = [\gamma, \delta]$ ในทฤษฎีบท 4.3.4 เราจะได้ทฤษฎีบท 2.3.3 ทันที

4.4 Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย

ในหัวข้อนี้เราจะแนะนำ Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัยและ Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัยของกึ่งกรุป ซึ่งเป็นนัยทั่วไปของ $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัยและ $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วิภัชนัย ตามลำดับ จากนั้นเราจะทำการจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปปกติ กึ่งกรุปปกติบริบูรณ์และกรุป โดยใช้ Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัยและ Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย

บทนิยาม 4.4.1 ให้ f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S

(i) จะเรียก f ว่า **Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย** (Δ-fuzzy generalized bi-ideal) ของ S ถ้า f สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$(\forall x, y, z \in S)(x, z \in S[f;\Delta] \vee xyz \in S[f;\Delta] \rightarrow \max\{f(xyz), \inf(\Delta)\} \geq \min\{f(x), f(z), \sup(\Delta)\})$$

(ii) จะเรียก f ว่า **Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย** (Δ-fuzzy bi-ideal) ของ S ถ้า f เป็นทั้ง Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยและ Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัยของ S

ข้อสังเกต ในกรณีแทน $\Delta = (\gamma, \delta)$, $\Delta = (\gamma, \delta]$, $\Delta = [\gamma, \delta)$ หรือ $\Delta = [\gamma, \delta]$ ในบทนิยาม 4.3.1 เราจะได้บทนิยาม 2.3.8(vii,viii) ทันที

สมบัติ 4.4.1 ถ้า f เป็น Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย (Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย) ของกึ่งกรุป S และ Ω เป็นเซตย่อยของ Δ ซึ่งทำให้ได้ $S[f;\Omega] \subseteq S[f;\Delta]$ และ $|\Omega| > 1$ แล้ว f เป็น Ω-ไอดีลคู่วิภัชนัย (Ω-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย) ของ S

การพิสูจน์ สมมติว่า f เป็น Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัยของ S ดังนั้นทฤษฎีบท 4.2.1 จะได้ว่า f เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S ต่อเราไปจะแสดงว่า f เป็น Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัยของ S โดยให้ $x, y, z \in S$ ซึ่ง $xyz \in S[f;\Omega]$ หรือ $x, z \in S[f;\Omega]$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $xyz \in S[f;\Delta]$ หรือ $x, z \in S[f;\Delta]$ เนื่องจาก $\sup(\Delta) \geq \sup(\Omega)$, $\inf(\Omega) \geq \inf(\Delta)$ และ f เป็น Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัยของ S จึงทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\max\{f(xyz), \inf(\Omega)\} &\geq \max\{f(xyz), \inf(\Delta)\} \\ &\geq \min\{f(x), f(y), \sup(\Delta)\} \\ &\geq \min\{f(x), f(y), \sup(\Omega)\}\end{aligned}$$

ฉะนั้น f เป็น Ω-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัยของ S

จากการพิสูจน์ข้างต้นซึ่งสามารถสรุปได้ว่า f เป็น Ω-ไอดีลคู่วิภัชนัยของ S $\square$

ในกรณีที่ $\Delta \subseteq [\gamma, \delta]$ และการใช้สมบัติ 4.4.1 เราพบว่า ทุก $(\in_{\gamma}, \in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-ไอดีลคู่วิภัชนัย ($(\in_{\gamma}, \in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย) ของกึ่งกรุป S เป็น Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย (Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย) ของ S อย่างไรก็ตามบทกลับไม่เป็นจริงซึ่งจะเห็นได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.4.1 กำหนดให้ $\mathbb{N}$ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด ดังนั้น $\mathbb{N}$ เป็นกึ่งกรุปภายใต้การคูณปกติ นิยามเซตย่อยวิภัชนัย f ของ $\mathbb{N}$ โดย

$$f(x) = \begin{cases} 0.1 \ ; \ x \in \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}, \\ 0.3 \ ; \ x \in \{2(2n+1) \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}, \\ 0.2 \ ; \ x \in \{4(2n+1) \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}, \\ 0.5 \ ; \ x \in \{8(2n+1) \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}, \\ 0.9 \ ; \ x \in \{16(2n+1) \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}, \\ 0.7 \ ; \ x \in \{32n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{N}$

ให้ $\Delta = \{0.1, 0.5, 0.7\}$ เราพบว่า f เป็น Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัยของ $\mathbb{N}$ แต่พบว่า f ไม่เป็น $(\in_{0.1}, \in_{0.1} \vee q_{0.7})$-ไอดีลคู่วิภัชนัยของ $\mathbb{N}$ เพราะว่า

$$\begin{aligned} \max\{f((6)(3)(2)), 0.1\} &= \max\{f(36), 0.1\} \\ &= 0.2 \\ &< 0.3 \\ &= \min\{f(6), f(2), 0.7\} \end{aligned}$$

□

ในสมบัติต่อไป เราจะพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง ไอดีลคู่ (ไอดีลคู่วางนัยทั่วไป) และ Δ-ไอดีลคู่ (ไอดีลคู่วางนัยทั่วไป)วิภัชนัยของกึ่งกรุป

สมบัติ 4.4.2 ให้ B เป็นเซตย่อยของกึ่งกรุป S ที่ไม่ใช่เซตว่าง จะได้ว่า B เป็นไอดีลคู่ (ไอดีลคู่วางนัยทั่วไป) ของ S ก็ต่อเมื่อ $C_{\mathbf{B}}$ เป็น Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย (Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย) ของ S

การพิสูจน์ ($\Rightarrow$) สมมติว่า B เป็นไอดีลคู่ของ S และให้ $\sup(\Delta) = \delta$ และ $\inf(\Delta) = \gamma$ ดังนั้น โดยสมบัติ 2.3.3 (vii) จึงทำให้ได้ว่า C_B เป็น $(\in_{\gamma}, \in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-ไอดีลคู่วิภัชนัยของ S นั่นคือ C_B เป็น $[\gamma, \delta]$-ไอดีลคู่วิภัชนัยของ S เนื่องจาก $|\Delta| > 1$, $\Delta \subseteq [\gamma, \delta], S[C_B; \Delta] \subseteq S[C_B; [\gamma, \delta]]$ และโดยสมบัติ 4.4.1 จึงได้ว่า C_A เป็น Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัยของ S

($\Leftarrow$) สมมติว่า $C_{\mathbf{B}}$ เป็น Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัยของ S ให้ $a,b\in B$ และ $x\in S$ จะได้ว่า $C_B(a)=C_B(b)=1$ และ $ab,axb\in S=S[C_B;\Delta]$ ฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
(C_{\mathbf{B}})_{\Delta}(axb) &= \min\{\max\{C_{\mathbf{B}}(axb),\inf(\Delta)\},\sup(\Delta)\}\\
&\geq \min\{\min\{C_{\mathbf{B}}(a),C_{\mathbf{B}}(b),\sup(\Delta)\},\sup(\Delta)\}\\
&= \min\{1,\sup(\Delta)\}\\
&= \sup(\Delta)
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
(C_{\mathbf{B}})_{\Delta}(ab) &= \min\{\max\{C_{\mathbf{B}}(ab),\inf(\Delta)\},\sup(\Delta)\}\\
&\geq \min\{\min\{C_{\mathbf{B}}(a),C_{\mathbf{B}}(b),\sup(\Delta)\},\sup(\Delta)\}\\
&= \min\{1,\sup(\Delta)\}\\
&= \sup(\Delta)
\end{aligned}
$$

โดยใช้สมบัติ 4.2.3 จึงทำให้ได้ว่า $ab,axb\in B$ ดังนั้น B เป็นไอดีลคู่ของ S □

บทตั้ง 4.4.1 ให้ f เป็น Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัยของกึ่งกรุป S และ x เป็นสมาชิกของ S ซึ่งทำให้ได้ว่า $x\in S[f;\Delta]$ จะได้ว่า

$$\max\{f(x),\inf(\Delta)\}\geq \min\{(f\circ C_S\circ f)(x),\sup(\Delta)\}$$

การพิสูจน์ สมมติว่า

$$\max\{f(x),\inf(\Delta)\}< \min\{(f\circ C_S\circ f)(x),\sup(\Delta)\}$$

จะพบว่ามีสมาชิก $a,b,c\in S$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $x=abc$ และ

$$\max\{f(x),\inf(\Delta)\}< \min\{f(a),f(c),\sup(\Delta)\}$$

เนื่องจาก f เป็น Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัยของ S และ $x\in S[f;\Delta]$ ทำให้ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\max\{f(x),\inf(\Delta)\} &= \max\{f(abc),\inf(\Delta)\}\\
&\geq \min\{f(a),f(c),\sup(\Delta)\}
\end{aligned}
$$

$$> \max\{f(x), \inf(\Delta)\}$$

จะพบว่าเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้นเราสามารถสรุปได้ว่า

$$\max\{f(x), \inf(\Delta)\} \geq \min\{(f \circ C_S \circ f)(x), \sup(\Delta)\}$$ □

จากบทนิยาม 4.4.1 เห็นได้ชัดเจนว่า ทุก Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัยของกึ่งกรุปเป็น Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย และเราพบว่า Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย และ Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย จะสมมูลกันบนกึ่งกรุปปกติซึ่งจะเห็นได้จากสมบัติต่อไปนี้

บทตั้ง 4.4.2 ให้ f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุปปกติ S จะได้ว่า f เป็น Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัยของ S ก็ต่อเมื่อ f เป็น Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัยของ S

การพิสูจน์ $(\Rightarrow)$ สมมติว่า f เป็น Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัยของ S ดังนั้นโดยบทนิยาม 4.4.1 จะได้ว่า f เป็น Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัยของ S

$(\Leftarrow)$ ให้ f เป็น Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัยของ S และให้ x, y เป็นสมาชิกของ S ซึ่งทำให้ได้ว่า $xy \in S[f;\Delta]$ และเนื่องจาก S เป็นกึ่งกรุปปกติจะได้ว่า $x = xax$ สำหรับบาง $a \in S$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\max\{f(xy), \inf(\Delta)\} &= \max\{f((xax)y), \inf(\Delta)\} \\
&= \max\{f(x(ax)y), \inf(\Delta)\} \\
&\geq \min\{f(x), f(y), \sup(\Delta)\}
\end{aligned}$$

ฉะนั้น f เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S และทำให้ได้ว่า f เป็น Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัยของ S □

บทตั้ง 4.4.3 ให้ f และ g เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S และ $x, y \in S$ ซึ่ง $\max\{f(x), \inf(\Delta)\} \geq \min\{g(y), \sup(\Delta)\}$ และ $\max\{g(y), \inf(\Delta)\} \geq \min\{f(x), \sup(\Delta)\}$ จะได้ว่า $f_\Delta(x) = g_\Delta(y)$

การพิสูจน์ เราจะพิจารณาค่า $g(y)$ ออกเป็น 3 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 สมมติว่า $g(y) \leq \inf(\Delta)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\inf(\Delta) &= \max\{g(y), \inf(\Delta)\} \\
&\geq \min\{f(x), \sup(\Delta)\}
\end{aligned}$$

และทำให้ได้ว่า $f(x) \leq \inf(\Delta)$ เพราะฉะนั้น $f_\Delta(x) = \inf(\Delta) = g_\Delta(y)$

กรณีที่ 2 สมมติว่า $g(y) \geq \sup(\Delta)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \max\{f(x), \inf(\Delta)\} &\geq \min\{g(y), \sup(\Delta)\} \\ &= \sup(\Delta) \end{aligned}$$

และทำให้ได้ว่า $f(x) \geq \sup(\Delta)$ เพราะฉะนั้น $f_\Delta(x) = \sup(\Delta) = g_\Delta(y)$

กรณีที่ 3 สมมติว่า $\inf(\Delta) < g(x) < \sup(\Delta)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \max\{f(x), \inf(\Delta)\} &\geq \min\{g(y), \sup(\Delta)\} \\ &= g(y) \\ &= \max\{g(y), \inf(\Delta)\} \\ &\geq \min\{f(x), \sup(\Delta)\} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $f(x) = g(y)$ และทำให้ได้ว่า $f_\Delta(x) = g_\Delta(y)$
โดยกรณีที่ 1-3 จึงสรุปได้ $f_\Delta(x) = g_\Delta(y)$

□

ต่อไปเราจะจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปปกติโดยใช้ Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัยและ Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย

ทฤษฎีบท 4.4.1 ให้ S เป็นกึ่งกรุป เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) S เป็นกึ่งกรุปปกติ

(ii) $f \circ C_S \circ f =_\Delta f$ สำหรับทุก Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย f ของ S

(iii) $f \circ C_S \circ f =_\Delta f$ สำหรับทุก Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย f ของ S

การพิสูจน์ (i) $\Rightarrow$ (iii) ให้ f เป็น Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัยของ S และ $x \in S[f;\Delta]$ โดยบทตั้ง 4.4.1 ทำให้ได้ว่า

$$\max\{f(x), \inf(\Delta)\} \geq \min\{(f \circ C_S \circ f)(x), \sup(\Delta)\}$$

โดยสมมติฐาน (i) จึงทำให้ได้ว่า $x = xyx$ สำหรับบาง $y \in S$ และได้ว่า

$$\begin{aligned} \max\{(f \circ C_S \circ f)(x), \inf(\Delta)\} &\geq \max\{\min\{f(x), C_S(y)\}, \inf(\Delta)\} \\ &\geq \max\{f(x), \inf(\Delta)\} \\ &= \max\{f(xyx), \inf(\Delta)\} \\ &\geq \min\{f(x), \sup(\Delta)\} \end{aligned}$$

โดยบทตั้ง 4.4.3 ทำให้ได้ว่า $(f \circ C_S \circ f)_\Delta(x) = f_\Delta(x)$ ดังนั้น $f \circ C_S \circ f =_\Delta f$ และสามารถสรุปได้ว่า (iii) เป็นจริง

(iii)$\Rightarrow$ (ii) เราสามารถพิสูจน์ได้โดยง่ายจึงละการพิสูจน์

(ii)$\Rightarrow$ (i) ให้ B เป็นไอดีลคู่ของ S โดยใช้สมบัติ 4.4.2, สมบัติ 2.3.1 และสมมติฐาน (ii) ทำให้ได้ว่า

$$C_{BSB} = C_B \circ C_S \circ C_B =_\Delta C_B$$

โดยสมบัติ 4.2.4 จะได้ว่า $BSB = B$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.2.1 จึงทำให้ได้ว่า S เป็นกึ่งกรุปปกติ นั่นคือ (i) เป็นจริง

□

เมื่อเราพิจารณากรณีที่ $\Delta = (\gamma, \delta), \Delta = (\gamma, \delta], \Delta = [\gamma, \delta)$ หรือ $\Delta = [\gamma, \delta]$ ในทฤษฎีบท 4.4.1 เราจะได้ทฤษฎีบท 2.3.2(i $\Leftrightarrow$ ii $\Leftrightarrow$ iii) ทันที

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ เราจะพิจารณาลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปปกติบริบูรณ์โดย Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย และ Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย

ทฤษฎีบท 4.4.2 ให้ S เป็นกึ่งกรุป เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) S เป็นกึ่งกรุปปกติบริบูรณ์

(ii) $f_\Delta(x) = f_\Delta(x^2)$ สำหรับทุก Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย f ของ S และสำหรับทุกๆ $x \in S$

(iii) $f_\Delta(x) = f_\Delta(x^2)$ สำหรับทุก Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย f ของ S และสำหรับทุกๆ $x \in S$

การพิสูจน์ (i)$\Rightarrow$ (iii) ให้ f เป็น Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัยของ S และ $x \in S$ ในกรณีที่ $x, x^2 \notin S[f;\Delta]$ เราจะได้ว่า $f_\Delta(x) = \inf(\Delta) = f_\Delta(x^2)$ ทันที ต่อไปสมมติว่า $x \in S[f;\Delta]$ หรือ $x^2 \in S[f;\Delta]$ จากสมมติฐาน (i) ทำให้ได้ว่ามีสมาชิก y ของ S ซึ่ง $x = xyx$ และ $xy = yx$ ดังนั้น

$$x = (xyx)y(xyx) = x^2y^3x^2 \text{ และ } x^2 = x(yx)x$$

เนื่องจาก f เป็น Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัยของ S ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\max\{f(x), \inf(\Delta)\} &= \max\{f(x^2y^3x^2), \inf(\Delta)\} \\ &\geq \min\{f(x^2), \sup(\Delta)\}\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\max\{f(x^2), \inf(\Delta)\} &= \max\{f(x(yx)x), \inf(\Delta)\} \\ &\geq \min\{f(x), \sup(\Delta)\}\end{aligned}$$

โดยบทตั้ง 4.4.3 จะพบว่า $f_\Delta(x)=f_\Delta(x^2)$ และทำให้ได้ว่า (iii) เป็นจริง

(iii) $\Rightarrow$ (ii) สมมติว่า (iii) เป็นจริง ให้ f เป็น Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัยของ S และ $x\in S$ ดังนั้น โดยบทนิยาม 4.4.1 จึงได้ว่า f เป็น Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัยของ S และโดย (iii) จึงได้ว่า $f_\Delta(x)=f_\Delta(x^2)$ และทำให้ได้ว่า (ii) เป็นจริง

(ii) $\Rightarrow$ (i) ให้ B เป็นไอดีลคู่ของ S และ x เป็นสมาชิกของ S ซึ่งทำให้ได้ว่า $x^2\in B$ โดยบทตั้ง 4.4.2 และสมมติฐาน (ii) จะได้ว่า

$$(C_B)_\Delta(x)=(C_B)_\Delta(x^2)=\sup(\Delta)$$

โดยสมบัติ 4.2.3 ทำให้ได้ว่า $x\in B$ เพราะฉะนั้น B เป็นเซตย่อยกึ่งเฉพาะ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.2.4 จะได้ว่า S เป็นกึ่งกรุปปกติบริบูรณ์และสามารถสรุปได้ว่า (i) เป็นจริง □

เมื่อเราพิจารณากรณีที่ $\Delta=(\gamma,\delta),\Delta=(\gamma,\delta],\Delta=[\gamma,\delta)$ หรือ $\Delta=[\gamma,\delta]$ ในทฤษฎีบท 4.4.2 เราจะได้บทแทรกดังต่อไปนี้

บทแทรก 4.4.1 ให้ S เป็นกึ่งกรุป เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) S เป็นกึ่งกรุปปกติบริบูรณ์

(ii) $f^*(x)=f^*(x^2)$ สำหรับทุก $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วิภัชนัย f ของ S และสำหรับทุกๆ $x\in S$

(iii) $f^*(x)=f^*(x^2)$ สำหรับทุก $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย f ของ S และสำหรับทุกๆ $x\in S$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\Delta=[\gamma,\delta]$ จะได้ว่า f เป็น $(\in_\gamma,\in_\gamma\vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วิภัชนัย (ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย) ของ S ก็ต่อเมื่อ f เป็น Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย (ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย) ของ S ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.4.2 จะได้ว่า บทแทรก 4.4.1 เป็นจริง □

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ เราจะพิจารณาลักษณะเฉพาะของกรุปโดย Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย และ Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย

ทฤษฎีบท 4.4.3 ให้ S เป็นกึ่งกรุป เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) S เป็นกรุป

(ii) $|\mathrm{Im}(f_\Delta)|=1$ สำหรับทุก Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย f ของ S

(iii) $|\mathrm{Im}(f_\Delta)|=1$ สำหรับทุก Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย f ของ S

การพิสูจน์ (i) $\Rightarrow$ (iii) ให้ e, x และ f เป็นเอกลักษณ์, สมาชิกและ Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย ของ S ตามลำดับ ในกรณีที่ $x,e\notin S[f;\Delta]$ เราจะได้ $f_\Delta(x)=\inf(\Delta)=f_\Delta(e)$ ทันที ต่อไป พิจารณากรณีที่ $x\in S[f;\Delta]$ หรือ $e\in S[f;\Delta]$ จะได้ว่า

$$\max\{f(x),\inf(\Delta)\} = \max\{f(exe),\inf(\Delta)\}$$
$$\geq \min\{f(e),\sup(\Delta)\}$$

และ

$$\max\{f(e),\inf(\Delta)\} = \max\{f(xx^{-1}x^{-1}x),\inf(\Delta)\}$$
$$\geq \min\{f(x),\sup(\Delta)\}$$

โดยบทตั้ง 4.4.3 จะได้ว่า $f_\Delta(x) = f_\Delta(e)$ และทำให้ได้ว่า $|\mathrm{Im}(f_\Delta)| = 1$ ดังนั้น (iii) เป็นจริง

(iii) $\Rightarrow$ (ii) สมมติว่า (iii) เป็นจริง ให้ f เป็น Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัยของ S ดังนั้นโดยบทนิยาม 4.4.1 จึงได้ว่า f เป็น Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัยของ S และโดย (iii) จึงได้ว่า $|\mathrm{Im}(f_\Delta)| = 1$ ฉะนั้น (ii) เป็นจริง

(ii) $\Rightarrow$ (i) ให้ B เป็นไอดีลคู่ของ S โดยใช้สมบัติ 4.4.2 และสมมติฐาน (ii) จะได้ว่า

$$(C_B)_\Delta(x) = \sup(\Delta) \text{ สำหรับทุก } x \in S$$

โดยใช้สมบัติ 4.2.3 จึงได้ว่า $B = S$ ดังนั้น S เป็นกรุป นั่นคือ (i) เป็นจริง □

เมื่อเราพิจารณากรณีที่ $\Delta = (\gamma,\delta), \Delta = (\gamma,\delta], \Delta = [\gamma,\delta)$ หรือ $\Delta = [\gamma,\delta]$ ในทฤษฎีบท 4.4.3 เราจะได้บทแทรกดังต่อไปนี้

บทแทรก 4.4.2 ให้ S เป็นกึ่งกรุป เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) S เป็นกรุป

(ii) $|\mathrm{Im}(f^*)| = 1$ สำหรับทุก $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วิภัชนัย f ของ S

(iii) $|\mathrm{Im}(f^*)| = 1$ สำหรับทุก $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย f ของ S

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\Delta = [\gamma,\delta]$ จะได้ว่า f เป็น $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วิภัชนัย (ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย) ของ S ก็ต่อเมื่อ f เป็น Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย (ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย) ของ S ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.4.3 จะได้ว่า บทแทรก 4.4.2 เป็นจริง □

บทที่ 5
อภิปรายผล บทสรุปและข้อเสนอแนะ

5.1 อภิปรายผล

งานวิจัยนี้มุ่งแสวงหาองค์ความรู้ใหม่ที่เป็นการบูรณาการด้านทฤษฎีกึ่งกรุปและทฤษฎีเซตวิภัชนัยในหัวข้อ "การจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปโดย Δ-ไอดีลวิภัชนัย" โดยได้ดำเนินการค้นคว้าข้อมูลจากบทความวิจัยที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อดังกล่าว เพื่อสร้างบทนิยามของเซตย่อยวิภัชนัยที่ซึ่งเป็นนัยทั่วไปของ $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลขวาวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลภายในวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยและ $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลวิภัชนัยของกึ่งกรุปที่แนะนำโดย Shabir และ Ali [14] เมื่อได้เซตย่อยวิภัชนัยที่ต้องการแล้วจึงนำมาสร้างทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับการจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปชนิดที่สำคัญอย่าง กึ่งกรุปปกติ กึ่งกรุปปกติภายใน กึ่งกรุปกึ่งเชิงเดียว กึ่งกรุปปกติบริบูรณ์และกรุป จากนั้นทำการพิสูจน์ตามหลักคณิตศาสตร์เพื่อให้ได้ทฤษฎีบทที่เป็นจริงซึ่งเป็นองค์ความรู้ใหม่ที่เป็นการบูรณาการด้านทฤษฎีกึ่งกรุปและทฤษฎีเซตวิภัชนัย

5.2 สรุปผลการวิจัย

จากการวิจัยได้แนะนำ Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัย Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย Δ-ไอดีลภายในวิภัชนัย Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยและ Δ-ไอดีลวิภัชนัยของกึ่งกรุปเป็นนัยทั่วไปของ $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลขวาวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลคู่วิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลภายในวิภัชนัย $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยและ $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-ไอดีลวิภัชนัย ตามลำดับ กึ่งกรุปที่สำคัญอย่าง กึ่งกรุปปกติ กึ่งกรุปปกติภายใน กึ่งกรุปกึ่งเชิงเดียว กึ่งกรุปปกติบริบูรณ์และกรุปสามารถจำแนกลักษณะเฉพาะได้โดยใช้เซตย่อยวิภัชนัยชนิด Δ ดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 ให้ S เป็นกึ่งกรุป เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) S เป็นกึ่งกรุปปกติ

(ii) $f \circ g =_\Delta f \wedge g$ สำหรับทุก Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัย f และ Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย g ของ S

ทฤษฎีบท 2 ให้ S เป็นกึ่งกรุป เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) S เป็นกึ่งกรุปปกติ

(ii) $f \circ C_S \circ f =_\Delta f$ สำหรับทุก Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัย f ของ S

ทฤษฎีบท 3 ให้ S เป็นกึ่งกรุป เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) S เป็นกึ่งกรุปปกติ

(ii) $f \circ C_S \circ f =_\Delta f$ สำหรับทุก Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย f ของ S

(iii) $f \circ C_S \circ f =_\Delta f$ สำหรับทุก Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย f ของ S

ทฤษฎีบท 4 ให้ S เป็นกึ่งกรุป เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) S เป็นกึ่งกรุปปกติบริบูรณ์

(ii) $f_\Delta(x) = f_\Delta(x^2)$ สำหรับทุก Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย f ของ S และสำหรับทุกๆ $x \in S$

(iii) $f_\Delta(x) = f_\Delta(x^2)$ สำหรับทุก Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย f ของ S และสำหรับทุกๆ $x \in S$

ทฤษฎีบท 5 ให้ S เป็นกึ่งกรุป เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) S เป็นกึ่งกรุปปกติภายใน

(ii) ทุก Δ-ไอดีลวิภัชนัยของ S เป็น Δ-เซตย่อยกึ่งเฉพาะวิภัชนัย

(iii) $f_\Delta(x) = f_\Delta(x^2)$ สำหรับทุก Δ-ไอดีลวิภัชนัย f ของ S และสำหรับทุก $x \in S$

ทฤษฎีบท 6 กำหนดให้ S เป็นกึ่งกรุป เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) S เป็นกึ่งกรุปกึ่งเชิงเดียว

(ii) $f \circ f =_\Delta f$ สำหรับทุก Δ-ไอดีลวิภัชนัย f ของ S

ทฤษฎีบท 7 ให้ S เป็นกึ่งกรุป เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) S เป็นกรุป

(ii) $|\mathrm{Im}(f_\Delta)| = 1$ สำหรับทุก Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย f ของ S

(iii) $|\mathrm{Im}(f_\Delta)| = 1$ สำหรับทุก Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย f ของ S

5.3 ข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้คณะผู้วิจัยได้แนะนำ Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัย Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย Δ-ไอดีลภายในวิภัชนัย Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยและ Δ-ไอดีลวิภัชนัยบนกึ่งกรุป พร้อมกับทำการจำแนกลักษณะเฉพาะกึ่งกรุปโดย Δ-ไอดีลซ้ายวิภัชนัย Δ-ไอดีลขวาวิภัชนัย Δ-ไอดีลคู่วางนัยทั่วไปวิภัชนัย Δ-ไอดีลคู่วิภัชนัย Δ-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยและ Δ-ไอดีลวิภัชนัย เราอาจจะขยายแนวคิดนี้ไปยัง กึ่งกรุปไตรภาค Γ-กึ่งกรุป LA-กึ่งกรุปและกึ่งกรุปอันดับ

เอกสารอ้างอิง

[1] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8, 338-353.

[2] Rosenfeld, A. (1971). Fuzzy groups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 35, 512-517.

[3] Kuroki, N. (1979). Fuzzy bi-ideals in semigroups. *Commentarii mathematici Universitatis Sancti Pauli*, 5, 128-132.

[4] Kuroki, N. (1981). On fuzzy ideals and fuzzy bi-ideals in semigroups. *Fuzzy Sets and Systems*, 5, 203-215.

[5] Kuroki, N. (1982). Fuzzy semiprime ideals in semigroups. *Fuzzy Sets and Systems*, 8, 71-79.

[6] Kuroki, N. (1991). On fuzzy semigroups. *Information Sciences*, 53, 203-236.

[7] Kuroki, N. (1992). Fuzzy generalized bi-ideals in semigroups. *Information Sciences*, 66, 235-243.

[8] Kim, K. H. (2001). On fuzzy point in semigroups. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 26, 707-712.

[9] Bhakat, S. K., & Das, P. (1992). On the definition of a fuzzy subgroup. *Fuzzy Sets and Systems*, 51, 235-241.

[10] Bhakat, S. K., & Das, P. (1996). $(\in, \in\vee q)$-fuzzy subgroups. *Fuzzy Sets and Systems*, 80, 359-368.

[11]Kazanci, O., & Yamak, S. (2008). Generalized fuzzy bi-ideals of semigroups. *Soft computing*, 12, 1119-1124.

[12] Shabir, M., Jun, Y. B., & Nawaz, Y. (2010). Characterizations of regular semigroups by (α, β)-fuzzy ideals. *Computers & Mathematics with Applications*, 59, 161-175.

[13] Jun, Y. B., & Song, S. Z. (2006). Generalized fuzzy interior ideals in semigroups. *Information Sciences*, 176, 3079-3093.

[14] Shabir, M., & Ali, M. (2013). Characterizations of semigroups by the properties of their $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy ideals. *Iranian Journal of Science and Technology (Sciences)*, 37, 117-131.

[15] Khan, F. M., Khan, A., & Sarmin, N. H. (2011). Characterizations of ordered semigroups by $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy interior ideals. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 32(4), 278-288.

[16] Ma, X., Zhan, J., & Jun, Y. B. (2011). Some kinds of $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy ideals of BCI-algebras. *Computers & Mathematics with Applications*, 61, 1005-1015.

[17] Yin, Y., Jun, Y. B., & Yang, Z. (2012). More General Forms of (α, β)-fuzzy Ideals of Ordered Semigroups. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 9(4), 99-113.

[18] Ma, X., & Zhan, J. (2012). New fuzzy h-ideals in hemirings. *University" Politehnica" of Bucharest Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics*, 74(1), 11-24.

[19] Rehman, N., & Shabir, M. (2013). Some kinds of-fuzzy ideals of ternary semigroups. *Iranian Journal of Science and Technology (Sciences)*, 37, 365-378.

[20] Zulfiqar, M. (2013). Some characterizations of $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy fantastic ideals in BCH-algebras. Acta Scientiarum. Technology, 35(1), 123-129.

[21] Huang, X., Yin, Y., & Zhan, J. (2013). Characterizations of Semihyperrings by Their $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-Fuzzy Hyperideals. *Journal of Applied Mathematics*, 2013. http://dx.doi.org/10.1155/2013/348203

[22] Rehman, N., & Shabir, M. (2014). Some characterizations of ternary semigroups by the properties of their $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy ideals. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 26, 2107-2117.

[23] Shabir, M., & Mahmood, T. (2015). Semihypergroups characterized by $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy hyperideals. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 28(6), 2667-2678.

[24] Ali, A., Shi, F. G., & Yousafzai, F. (2015). On generalized fuzzy ordered AG-groupoids. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 9(3), 473-487.

[25] Zulfiqar, M. (2016). Some properties of n-dimensional $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee q_\delta)$-fuzzy subalgebra in BRK-algebras. *Analele Universitatii" Ovidius" Constanta-Seria Matematica*, 24, 301-320.

[26] Rehman, N., Shah, A., Inayt, S., Ali, A., & Aslam, R. (2018). Roughness in $(\in_{\gamma},\in_{\gamma} \vee q_{\delta})$-fuzzy substructures of semigroups based on set valued mapping. *Journal of Computational Analysis & Applications*, 24(3), 463-473.

[27] Kuroki, N., Malik, D. S., & Mordeson, J. N. (2003). Fuzzy semigroups. Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[28] Lajos, S. (1969). On the bi-ideals in semigroups. *Proceedings of the Japan Academy*, 45(8), 710-712.

ประวัติของนักวิจัย

ประวัติหัวหน้าโครงการ

1. ประวัติส่วนตัว

ชื่อ-สกุล (ไทย) : นางสาวยุพร ริมชลการ

(อังกฤษ) : Miss Yuporn Rimcholakarn

ตำแหน่งทางวิชาการ : รองศาสตราจารย์

ที่อยู่ที่ติดต่อได้สะดวก : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม

E-mail : rimcholakarn@yahoo.co.th

2. ประวัติการศึกษา

วุฒิการศึกษา	จากสถาบัน	ปีที่จบ
ศษ.บ.(คณิตศาสตร์)	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่	2527
ศศ.ม.(การสอนคณิตศาสตร์)	มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์	2534
กศ.ด.(คณิตศาสตรศึกษา)	มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ	2543

3. สาขาวิชาที่มีความชำนาญพิเศษ

พีชคณิต ระบบจำนวน รากฐานเรขาคณิต

4. ประสบการณ์ที่เกี่ยวกับการวิจัย

ปี(ระยะเวลา)	ตำแหน่ง	เรื่อง(แหล่งทุน)
2553-2554	หัวหน้าโครงการ	รูปแบบการพัฒนาครูในจังหวัดเลยที่สอนคณิตศาสตร์แต่ไม่มีวุฒิทางสาขาวิชาคณิตศาสตร์(วช.)
2555-2556	หัวหน้าโครงการ	การพัฒนาตัวชี้วัดคุณภาพการจัดการศึกษาหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิตสาขาวิชาคณิตศาสตร์ในมหาวิทยาลัยราชภัฏภาคตะวันออกเฉียงเหนือ(วช.)
2559-2560	หัวหน้าโครงการ	ความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสกับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาค์คิมีดีส (มรพส)

5.ผลงานทางวิชาการ

5.1 งานวิจัย

อาภรณ์รัตน์ สารทัศนานันท์, ภิญโญ มนูศิปล์ และ ยุพร ริมชลการ.(2544). **การพัฒนาชุดการฝึกอบรม เรื่อง การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง สำหรับครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น.**เลย : มหาวิทยาลัยราชภัฏเลย.

ยุพร ริมชลการ.(2555).**รูปแบบการพัฒนาครูในจังหวัดเลยที่สอนคณิตศาสตร์แต่ไม่มีวุฒิทางสาขาวิชาคณิตศาสตร์.ประชุมวิชาการระดับชาติและระดับนานาชาติการพัฒนาชนบทที่ยั่งยืนประจำปี 2555 หัวข้อ “ชุมชนท้องถิ่น ฐานรากการพัฒนาประชาคมเศรษฐกิจอาเซียน”.**ขอนแก่น: มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

ยุพร ริมชลการ และ ภิญโญ มนูศิลป์.(2558).**การพัฒนาตัวชี้วัดคุณภาพการจัดการศึกษาหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิตสาขาวิชาคณิตศาสตร์ในมหาวิทยาลัยราชภัฏภาคตะวันออกเฉียงเหนือ.ประชุมวิชาการระดับชาติพะเยาวิจัยครั้งที่ 4.** พะเยา: มหาวิทยาลัยพะเยา.(29-30 มค.58. หน้า 664-672)

ยุพร ริมชลการ.(2560).**ความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสกับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาค์คิมีดีส.** วารสารมหาวิทยาลัยนเรศวร:วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ปีที่ 25 ฉบัยที่ 1 ประจำเดือนมกราคม-มีนาคม 2560

Yuporn Rimcholakarn.(2018).The Relationship Between Nine-Point Circle of Archimedes’ Triangle Inscribed Circle of Archimedes’ Triangle and Spieker Circle. Naresuan University:Journal Science and Techonolgy 26(3) July-Septemver.2018.

ภิญโญ มนูศิลป์ และ ยุพร ริมชลการ.(2559).การพัฒนาตัวบ่งชี้การบริหารงานวิชาการที่มีประสิทธิผลของโรงเรียนเอกชน ระดับการศึกษาขั้นพื้นฐานภาคตะวันออกเฉียงเหนือ. วารสารมนุษยญศาสตร์และสังคมศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม ปีที่ 10 ฉลับที่ 1 มค.-มิย. 2559 หน้า 180-193

ภิญโญ มนูศิลป์ และ ยุพร ริมชลการ.(2558). ปัจจัยที่ส่งผลต่อประสิทธิผลของทีมในสถานศึกษาสังกัดสำนักงานส่งเสริมการศึกษานอกระบบและการศึกษาตามอัธยาศัยจังหวัดเลย.วารสารมนุษยญศาสตร์และสังคมศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม ปีที่ 9 ฉบับที่ 1

มค.-มิย. 2558 หน้า 109-130

ธนูชัย บุตรเต ภิญโญ มนูศิลป์ และยุพร ริมชลการ.(2560) การวางแผนกลยุทธ์สถานศึกษาของโรงเรียนเทศบาลจังหวัดเลย.วารสารวิชาการมหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต. ปีที่13 ฉบับที่2 กค.-ธค. 2560 หน้า 58-70

ภิญโญ มนูศิลป์ และยุพร ริมชลการ.(2561). สมบัติของพื้นที่วงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส. ปีที่ 37 ฉบับที่ 1 มค.-กพ. 2561 หน้า 136-150

5.2 ผลงานวิชาการในลักษณะอื่น

ยุพร ริมชลการ.(2544).**เอกสารประกอบการสอน คณิตศาสตร์สำหรับครูประถม.** เลย: มหาวิทยาลัยราชภัฏเลย.

ยุพร ริมชลการ.(2549).**เอกสารคำสอน เรขาคณิตเบื้องต้น.** เลย: มหาวิทยาลัยราชภัฏเลย.

5.3 ตำรา/หนังสือ

ยุพร ริมชลการ.(2544).**ทฤษฎีสมการ.** เลย: มหาวิทยาลัยราชภัฏเลย.

ยุพร ริมชลการ.(2548).**พีชคณิตนามธรรม1.** เลย: มหาวิทยาลัยราชภัฏเลย.

ยุพร ริมชลการ.(2552).**หลักการคณิตศาสตร์.** เลย: มหาวิทยาลัยราชภัฏเลย.

ยุพร ริมชลการ.(2558).**รากฐานเรขาคณิต.** พิษณุโลก : มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม.

ประวัติผู้ร่วมวิจัย

ชื่อ-สกุล (ไทย) : ว่าที่ร้อยตรีพงษ์พันธ์ จุลทา

(อังกฤษ) : Acting Sub Lt. Pongpun Julatha

ตำแหน่งทางวิชาการ : อาจารย์

ที่อยู่ที่ติดต่อได้สะดวก : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม

E-mail : pongpunjulatha@hotmail.com

ประวัติการศึกษา

วุฒิการศึกษา	จากสถาบัน	ปีที่จบ
วท.บ.(คณิตศาสตร์)	มหาวิทยาลัยนเรศวร	2550
วท.ม.(คณิตศาสตร์)	มหาวิทยาลัยนเรศวร	2554
ปร.ด.(คณิตศาสตร์)	มหาวิทยาลัยนเรศวร	2560

สาขาวิชาที่มีความชำนาญพิเศษ

พีชคณิต กึ่งกรุปวิภัชนัย กรุป กึ่งกรุป

ผลงานทางวิชาการ

P. Julatha and M. Siripitukdet. (2017). Characterizations of semigroups in terms of $(\in_{\Delta}, \in_{\Delta} \vee q_{\Delta})$-fuzzy generalized bi-ideals, *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 13(9), 6511-6523.

P. Julatha and M. Siripitukdet. (2017). Some Characterizations of Fuzzy Bi-ideals and Fuzzy Quasi-ideals of Semigroups, *Engineering Letters*, 25(2), 160-166.

M. Siripitukdet, P. Julatha and A. Farajzadeh. (2017). Characterizations of semigroups in terms of their $(\in_{\Delta}, \in_{\Delta} \vee q_{\Delta})$-fuzzy ideals, *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications,* 39(5), 815-842.

M. Siripitukdet and P. Julatha. (2012). The greatest subgroup of a semigroup in Γ-semigroups, *Lobachevskii Journal of Mathematics,* 33(2), 158-164.

ภาคผนวก

มหาวิทยาลัยราชภัฏลำปาง

ร่วมกับ

เครือข่ายบัณฑิตศึกษามหาวิทยาลัยราชภัฏภาคเหนือ

มอบเกียรติบัตรฉบับนี้ให้ไว้เพื่อแสดงว่า

อาจารย์ ดร.พงษ์พันธ์ จุลทา

ได้นำเสนอผลงานวิจัย (ภาคบรรยายดีเด่น)

ในการประชุมสัมมนาวิชาการนำเสนอผลงานวิจัยระดับชาติ

เครือข่ายบัณฑิตศึกษา มหาวิทยาลัยราชภัฏภาคเหนือ ครั้งที่ ๑๘ และลำปางวิจัย ครั้งที่ ๔

วันที่ ๒๐ กรกฎาคม พุทธศักราช ๒๕๖๑

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อภิรักษ์ ชัยเสนา
รองอธิการบดี มหาวิทยาลัยราชภัฏลำปาง

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ณัฐรดา วงษ์นายะ
ประธานเครือข่ายบัณฑิตศึกษา มหาวิทยาลัยราชภัฏภาคเหนือ

รองศาสตราจารย์ ดร.สมเกียรติ สายธนู
อธิการบดีมหาวิทยาลัยราชภัฏลำปาง

Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป

Δ-FUZZY SUBSEMIGROUPS OF SEMIGROUPS

ยุพร ริมชลการ(Yuporn Rimcholakarn) พงษ์พันธ์ จุลทา(Pongpun Julatha)*
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม
*Corresponding author. E-mail: pongpun.j@psru.ac.th

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้แนะนำ Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุปซึ่งเป็นนัยทั่วไปของ $(\in_\lambda, \in_\lambda \vee q_\mu)$-กึ่งกรุปย่อย-วิภัชนัยของกึ่งกรุป พร้อมกำหนดลักษณะเฉพาะบางประการของ Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป

คำสำคัญ: เซตย่อยวิภัชนัย กึ่งกรุป กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย $(\in_\lambda, \in_\lambda \vee q_\mu)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย

Abstract

In this paper, we introduce a concept of a Δ-fuzzy subsemigroup of semigroups which is a generalized concept of a $(\in_\lambda, \in_\lambda \vee q_\mu)$-fuzzy subsemigroup of semigroups. Some characterizations of Δ-fuzzy subsemigroups of semigroups are given.

Keywords: Fuzzy subset, Semigroup, Fuzzy subsemigroup, $(\in_\lambda, \in_\lambda \vee q_\mu)$-fuzzy subsemigroup, Δ-fuzzy subsemigroup

บทนำ

แนวคิดของเซตวิภัชนัยหรือเซตย่อยวิภัชนัย (Zadeh, 1965) ได้รับการแนะนำโดย Zadeh ซึ่งเป็นแนวคิดที่ช่วยแก้ปัญหาบางประการที่ทฤษฎีเซตไม่สามารถอธิบายได้ และเซตวิภัชนัยยังเป็นแนวคิดที่วางนัยทั่วไปสำหรับบางโครงสร้างพีชคณิต Zadeh และนักวิจัยจำนวนมากได้ทำการศึกษาค้นคว้าและพัฒนาแนวคิดเซตวิภัชนัยไปสู่ศาสตร์ต่างๆ เช่น คณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ วิศวกรรมศาสตร์ แพทยศาสตร์ และเศรษฐศาสตร์ เป็นต้น ในส่วนการนำแนวคิดเซตวิภัชนัยมาใช้เป็นเครื่องมือในการศึกษาด้านพีชคณิตนั้น ริเริ่มในปี 1971 Rosenfeld นำแนวคิดเซตวิภัชนัยมาใช้เป็นเครื่องมือในการศึกษาทฤษฎีกรุป (ทฤษฎีกรุปพอยด์) และได้นำเสนอโครงสร้างย่อยวิภัชนัยของกรุป (กรุปพอยด์) กล่าวคือได้แนะนำกรุปย่อยวิภัชนัย (กรุปพอยด์ย่อยวิภัชนัย) ของกรุป (กรุปพอยด์)

พร้อมกับให้สมบัติบางประการของพวกมัน (Rosenfel, 1971) จากนั้นมีการนำแนวคิดเซตวิภัชนัยไปใช้เป็นเครื่องมือในการศึกษาโครงสร้างพีชคณิตชนิดอื่นๆ อีกมากมาย Kuroki (Kuroki, 1981; Kuroki, 1982; Kuroki, 1991; Kuroki, 1992; Kuroki, 1993) ได้ศึกษาและพัฒนากึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยหลากหายชนิดของกึ่งกรุป เช่น ไอดีลวิภัชนัย ไอดีลภายในวิภัชนัย ไอดีลคู่วิภัชนัย และควอซี-ไอดีลวิภัชนัย เป็นต้น และให้สมบัติบางประการของกึ่งกรุปย่อย-วิภัชนัยเหล่านั้น พร้อมกับจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปชนิดต่าง ๆ ในเทอมของกึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย Mordeson และคณะ (Mordeson et al., 2003) ได้ศึกษาทฤษฎีกึ่งกรุปวิภัชนัยและบทประยุกต์ของทฤษฎีกึ่งกรุปวิภัชนัย

โครงสร้างย่อยวิภัชนัยของพีชคณิตได้รับการศึกษา ค้นคว้าและพัฒนาอย่างต่อเนื่อง Bhakat และ Das (Bhakat & Das, 1996) ได้แนะนำ (α,β)-กรุปย่อยวิภัชนัยของกรุปเมื่อกำหนดให้ $\alpha,\beta\in\{\in,q,\in\vee q,\in\wedge q\}$ และ $\alpha\neq\in\wedge q$ และแสดงให้เห็นว่า $(\in,\in\vee q)$-กรุปย่อยวิภัชนัยของกรุปเป็นนัยทั่วไปของกรุปย่อยวิภัชนัย Jun และ Song (Jun & Song, 2006) ได้แนะนำ (α,β)-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย และ (α,β)-ไอดีลภายในวิภัชนัยของกึ่งกรุป และพบว่า $(\in,\in\vee q)$- กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุปเป็นนัยทั่วไปของกึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย Shabir และคณะ (Shabir et al., 2010, pp. 161-175) ได้ศึกษาโครงสร้าง (α,β)-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยชนิดที่ซึ่งถูกเรียกว่า (α,β)-ไอดีลวิภัชนัย (α,β)-ไอดีลคู่วิภัชนัย และ (α,β)-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัย และพบว่า $(\in,\in\vee q)$-ไอดีลวิภัชนัย $(\in,\in\vee q)$-ไอดีลคู่วิภัชนัยและ $(\in,\in\vee q)$-ควอซี-ไอดีลวิภัชนัยเป็นนัยทั่วไปของไอดีลวิภัชนัย ไอดีลคู่วิภัชนัยและควอซี-ไอดีลวิภัชนัย ตามลำดับ Shabir และคณะ (Shabir et al., 2010, pp. 1473-1493) ได้ทำการศึกษาและพัฒนาโครงสร้างย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุปและได้แนะนำโครงสร้าง $(\in,\in\vee q_k)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย $(\in,\in\vee q_k)$-ไอดีลวิภัชนัย และ $(\in,\in\vee q_k)$-ไอดีลคู่วิภัชนัยของกึ่งกรุป พวกเขาได้แสดงให้เห็นว่า $(\in,\in\vee q_k)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย $(\in,\in\vee q_k)$-ไอดีลวิภัชนัย และ $(\in,\in\vee q_k)$-ไอดีลคู่วิภัชนัยเป็น นัยทั่วไปของ$(\in,\in\vee q)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย $(\in,\in\vee q)$-ไอดีลวิภัชนัย และ $(\in,\in\vee q)$-ไอดีลคู่วิภัชนัย ตามลำดับ พร้อมกับจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุปปกติภายในและกึ่งกรุปปกติในเทอมของ $(\in,\in\vee q_k)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยเหล่านั้น Shabir และ Ali (Shabir & Ali, 2013) ได้ศึกษา $(\in_\lambda,\in_\lambda\vee q_\mu)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย $(\in_\lambda,\in_\lambda\vee q_\mu)$-ไอดีลวิภัชนัย และ $(\in_\lambda,\in_\lambda\vee q_\mu)$-ไอดีลคู่วิภัชนัยของกึ่งกรุปซึ่งเป็นนัยทั่วไปของ $(\in,\in\vee q_k)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย $(\in,\in\vee q_k)$-ไอดีลวิภัชนัย และ $(\in,\in\vee q_k)$-ไอดีลคู่วิภัชนัย ตามลำดับ และใช้ $(\in_\lambda,\in_\lambda\vee q_\mu)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยเหล่านั้นในการจำแนกลักษณะเฉพาะของกึ่งกรุป

จากงานวิจัยที่กล่าวมาข้างต้น จะเห็นได้ว่ากึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยและกึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยวางนัยทั่วไปของกึ่งกรุป มีบทบาทสำคัญต่อการศึกษาทฤษฎีกึ่งกรุป ผู้วิจัยจึงมีความสนใจในการศึกษาและพัฒนากึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยวางนัยทั่วไปของ กึ่งกรุป โดยผู้วิจัยได้แนะนำ Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย

ของกึ่งกรุปซึ่งเป็นนัยทั่วไปชนิดหนึ่งของ $\left(\in_{\lambda},\in_{\lambda} \vee q_{\mu}\right)$-กึ่งกรุปย่อย-วิภัชนัย พร้อมกับให้ลักษณะเฉพาะบางประการของ Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษาโครงสร้างที่เป็นนัยทั่วไปของ $\left(\in_{\lambda},\in_{\lambda} \vee q_{\mu}\right)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป และหาลักษณะเฉพาะบางประการของนัยทั่วไป $\left(\in_{\lambda},\in_{\lambda} \vee q_{\mu}\right)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยนี้เป็นการวิจัยเชิงคุณภาพโดยการศึกษาข้อมูลจากเอกสาร และเก็บรวบรวมข้อมูลจากงานวิจัยที่มีการศึกษามาแล้ว พร้อมทั้งได้ศึกษาแนวทางใหม่ๆ ด้วย โดยมีวิธีดำเนินการวิจัยดังนี้

1. ศึกษาทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง
2. สร้างปัญหาใหม่จากทฤษฎีบทเดิมที่เคยศึกษาไว้
3. ดำเนินการพิสูจน์
4. สรุปและอภิปรายผล

ผลการวิจัย

กำหนดให้ $\varnothing \neq \Delta \subseteq [0,1]$ และ $0 \leq \lambda < \mu \leq 1$ และให้ S แทนกึ่งกรุป เรียกฟังก์ชัน $f: S \rightarrow [0,1]$ ว่า

เซตย่อยวิภัชนัย (fuzzy subset) (Zadeh, 1965) ของ S สำหรับเซตย่อยวิภัชนัย f ของ S นิยามเซตย่อย $S_{(f;\Delta)}$ ของ S ดังนี้

$$S_{(f;\Delta)} = \{x \mid f(x) \geq \sup(\Delta) \text{ หรือ } f(x) \in \Delta \text{ หรือ } f(x) \leq \inf(\Delta)\}$$

ข้อสังเกต ให้ f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

(1) ถ้า $\Delta = (\lambda, \mu), \Delta = [\lambda, \mu), \Delta = (\lambda, \mu]$ หรือ $\Delta = [\lambda, \mu]$ แล้ว $S_{(f;\Delta)} = S$

(2) ถ้า $\Delta = \{\lambda\}$ แล้ว $S_{(f;\Delta)} = S$

(3) ถ้า $S_{(f;\Delta)} \neq S$ แล้ว $\sup(\Delta) > \inf(\Delta)$

บทนิยาม 1 (Mordeson et al., 2003) ให้ f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S เรียก f ว่า **กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย** (fuzzy subsemigroup) ของ S ถ้า

$$f(xy) \geq \min\{f(x), f(y)\}$$

สำหรับ $x, y \in S$

ตัวอย่าง 1 กำหนดให้ $S = \{0, x, y, z\}$ และการดำเนินการทวิภาค " $\bullet$ " บน S โดยนิยามดังนี้

$\bullet$	0	x	y	z
0	0	0	0	0
x	0	0	0	0
y	0	0	x	0
z	0	0	x	x

จะได้ว่า S เป็นกึ่งกรุป (Mordeson et al., 2003) ให้ f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของ S ที่นิยามดังนี้

$$f(0) = 0.8, \quad f(x) = 0.6, \quad f(y) = 0.5, \quad f(z) = 0.3$$

จะพบว่า f เป็นกึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S

บทนิยาม 2 (Shabir & Ali, 2013) ให้ f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S เรียก f ว่า $(\in_\lambda, \in_\lambda \vee q_\mu)$ **-กึ่งกรุปย่อย-วิภัชนัย** ($(\in_\lambda, \in_\lambda \vee q_\mu)$-fuzzy subsemigroup) ของ S ถ้า

$$\max\{f(xy), \lambda\} \geq \min\{f(x), f(y), \mu\}$$

สำหรับ $x, y \in S$

จากบทนิยาม 1 และ 2 เราพบว่า ทุกกึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุปเป็น $(\in_\lambda, \in_\lambda \vee q_\mu)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป แต่บทกลับไม่เป็นจริงซึ่งเห็นได้จากตัวอย่างดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2 กำหนดให้ $S = \{0, x, y, z\}$ และการดำเนินการทวิภาค " $\bullet$ " บน S โดยนิยามดังนี้

$\bullet$	0	x	y	z
0	0	0	0	0
x	0	x	y	0
y	0	0	0	0
z	0	z	0	0

จะได้ว่า S เป็นกึ่งกรุป (Mordeson et al., 2003) และให้ f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของ S ที่นิยามดังนี้

$$f(0) = 0.7, \quad f(x) = 0.6, \quad f(y) = 0.5, \quad f(z) = 0.8$$

จะพบว่า f เป็น $\left(\in_{0.5},\in_{0.5}\vee q_{0.7}\right)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S แต่ f ไม่เป็นกึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S เพราะว่า

$$f(zz)=f(0)=0.7<0.8=f(z)=\min\{f(z),f(z)\}$$

ต่อไปเราจะแนะนำเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุปซึ่งเป็นนัยทั่วไปของ $\left(\in_{\lambda},\in_{\lambda}\vee q_{\mu}\right)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป

บทนิยาม 3 ให้ f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S เรียก f ว่า Δ**-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัย** (Δ-fuzzy subsemigroup) ของ S ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$(\forall x,y\in S)\left(xy\in S_{(f;\Delta)}\rightarrow \max\{f(xy),\inf(\Delta)\}\geq\min\{f(x),f(y),\sup(\Delta)\}\right)$$

ตัวอย่าง 3 กำหนดให้ $S=\{a,b,c,d\}$ และการดำเนินการทวิภาค “ * ” บน S โดยนิยามดังนี้

$*$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	a	b
d	a	a	b	c

จะได้ว่า S เป็นกึ่งกรุป (Mordeson et al., 2003) ต่อไปเรานิยามเซตย่อยวิภัชนัย f ของ S โดย

$$f(a)=0.4,\quad f(b)=0.6,\quad f(c)=0.5,\quad f(d)=0.3$$

จะพบว่า f เป็น $\{0.3,0.5,0.6\}$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S

แต่ f ไม่เป็น $(\in_{0.3},\in_{0.3}\vee q_{0.6})$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S เพราะว่า

$$\begin{aligned}\max\{f(b*c),0.3\}&=\max\{f(a),0.3\}\\&=0.4\\&<0.5\\&=\min\{f(b),f(c),0.6\}\end{aligned}$$

จากบทนิยาม 3 และเมื่อเรากำหนดให้ $\Delta=(\lambda,\mu)$ จะพบว่า เซตย่อยวิภัชนัย f ของกึ่งกรุป S เป็น (λ,μ)-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S ก็ต่อเมื่อ

$$\max\{f(xy),\lambda\}\geq\min\{f(x),f(y),\mu\} \quad \text{สำหรับ } x,y\in S$$

นั่นคือ f เป็น (λ,μ)-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S ก็ต่อเมื่อ f เป็น $(\in_\lambda,\in_\lambda \vee q_\mu)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S ดังนั้น เราจึงสามารถสรุปได้ว่า Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุปเป็นนัยทั่วไปของ $(\in_\lambda,\in_\lambda \vee q_\mu)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป

เมื่อพิจารณา $\Delta=(\lambda,\mu),\Delta=[\lambda,\mu),\Delta=(\lambda,\mu]$ และ $\Delta=[\lambda,\mu]$ เราจึงได้ทฤษฎีดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 ให้ f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) f เป็น (λ,μ)-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S

(2) f เป็น $(\lambda,\mu]$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S

(3) f เป็น $[\lambda,\mu)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S

(4) f เป็น $[\lambda,\mu]$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S

(5) f เป็น $(\in_\lambda,\in_\lambda \vee q_\mu)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S

พิสูจน์ โดยบทนิยาม 2 บทนิยาม 3 และ $S_{(f;(\lambda,\mu))}=S_{(f;[\lambda,\mu])}=S_{(f;(\lambda,\mu])}=S_{(f;[\lambda,\mu))}=S$

ทฤษฎีบท 2 ถ้า f เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S แล้ว f เป็น Ω-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S สำหรับเซตย่อยไม่ว่าง Ω ของ Δ โดยที่ $S_{(f;\Omega)}\subseteq S_{(f;\Delta)}$

พิสูจน์ สมมติ $\varnothing\neq\Omega\subseteq\Delta$, $S_{(f;\Omega)}\subseteq S_{(f;\Delta)}$, $x,y\in S$ และ $xy\in S_{(f;\Omega)}$ จะได้ว่า $xy\in S_{(f;\Delta)}$ เนื่องจาก f เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S ทำให้ได้ว่า

$$\max\{f(xy),\inf(\Delta)\}\geq\min\{f(x),f(y),\sup(\Delta)\}$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\max\{f(xy),\inf(\Omega)\}&\geq\max\{f(xy),\inf(\Delta)\}\\&\geq\min\{f(x),f(y),\sup(\Delta)\}\\&\geq\min\{f(x),f(y),\sup(\Omega)\}\end{aligned}$$

ดังนั้น f เป็น Ω-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S

ให้ f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S และ $\Delta\subseteq[\lambda,\mu]$ แล้ว $S_{(f;\Delta)}\subseteq S_{(f;[\lambda,\mu])}$ จากทฤษฎีบท 1 และทฤษฎีบท 2 จะได้บทแทรก 3 โดยทันที

บทแทรก 3 ถ้า f เป็น $(\in_\lambda,\in_\lambda \vee q_\mu)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S แล้ว f เป็น Ω-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S สำหรับเซตย่อยไม่ว่าง Ω ของ $[\lambda,\mu]$

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 1 ทฤษฎีบท 2 และแทน $\Delta=[\lambda,\mu]$

กำหนดให้ f และ g เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S นิยามเซตย่อยวิภัชนัย $f\wedge g$ (Mordeson et al., 2003) ของ S โดย

$$(f\wedge g)(x)=\min\{f(x),g(x)\} \text{ สำหรับ } x\in S$$

ทฤษฎีบท 4 ถ้า f และ g เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S แล้ว $f\wedge g$ เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S

พิสูจน์ สมมติ $x,y\in S$ และ $xy\in S_{(f\wedge g;\Delta)}$ เราจะแยกพิจารณา 2 กรณี ดังนี้

กรณี 1: $(f\wedge g)(xy)=f(xy)$ จะได้ว่า $xy\in S_{(f;\Delta)}$

เนื่องจาก f เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S จะได้ว่า

$$\max\{f(xy),\inf(\Delta)\}\geq\min\{f(x),f(y),\sup(\Delta)\}$$

และทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\max\{(f\wedge g)(xy),\inf(\Delta)\}&=\max\{f(xy),\inf(\Delta)\}\\&\geq\min\{f(x),f(y),\sup(\Delta)\}\\&\geq\min\{(f\wedge g)(x),(f\wedge g)(y),\sup(\Delta)\}\end{aligned}$$

กรณี 2: $(f\wedge g)(xy)=g(xy)$ เราสามารถพิสูจน์โดยทำนองเดียวกับกรณี 1 ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\max\{(f\wedge g)(xy),\inf(\Delta)\}\geq\min\{(f\wedge g)(x),(f\wedge g)(y),\sup(\Delta)\}$$

ดังนั้น $f\wedge g$ เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S

บทแทรก 5 (Shabir & Ali, 2013) ถ้า f และ g เป็น $(\in_\lambda,\in_\lambda\vee q_\mu)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S แล้ว $f\wedge g$ เป็น $(\in_\lambda,\in_\lambda\vee q_\mu)$-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 1 ทฤษฎีบท 4 และแทน $\Delta=(\lambda,\mu)$

กำหนดให้ f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S นิยามเซตย่อยวิภัชนัย f_Δ ของ S ดังนี้

$$f_\Delta(x)=\begin{cases}\max\{\min\{f(x),\sup(\Delta)\},\inf(\Delta)\} & ;x\in S_{(f;\Delta)}\\ \sup(\Delta) & ;x\notin S_{(f;\Delta)}\end{cases}$$

สำหรับ $x\in S$ และเราพบว่า $S_{(f_\Delta;\Delta)}=S$

บทตั้ง 6 ถ้า f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S แล้ว $f_\wedge$ เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S ก็ต่อเมื่อ f_Δ เป็น กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S

พิสูจน์ ให้ $x, y \in S$ จะได้ว่า $xy \in S_{(f_\Delta;\Delta)}$ เนื่องจาก f_Δ เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S จะได้

$$\begin{aligned} f_\Delta(xy) &= \max\{f_\Delta(xy), \inf(\Delta)\} \\ &\geq \min\{f_\Delta(x), f_\Delta(y), \sup(\Delta)\} \\ &= \min\{f_\Delta(x), f_\Delta(y)\} \end{aligned}$$

ดังนั้น f_Δ เป็น กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S ในส่วนบทกลับของทฤษฎีนี้ชัดเจน

ทฤษฎีบท 7 ถ้า f เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป S และ f_Δ เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S แล้ว f เป็น
Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S

พิสูจน์ ให้ $x, y \in S$ และ $xy \in S_{(f;\Delta)}$ จะได้ว่า $xy \in S_{(f_\wedge;\Delta)}$ และ

$$f_\Delta(xy) = \max\{\min\{f(xy), \sup(\Delta)\}, \inf(\Delta)\}$$

เนื่องจาก f_Δ เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S และบทตั้ง 6 จะได้ว่า

$$f_\Delta(xy) \geq \min\{f_\Delta(x), f_\Delta(y)\}$$

กรณี 1 $\min\{f_\Delta(x), f_\Delta(y)\} = f_\Delta(x)$ จะได้ว่า $f_\Delta(xy) \geq f_\Delta(x)$ ถ้า $x \notin S_{(f;\Delta)}$ จะได้ว่า $f_\Delta(x) = \sup(\Delta)$ และทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} \max\{f(xy), \inf(\Delta)\} &\geq \max\{\min\{f(xy), \sup(\Delta)\}, \inf(\Delta)\} \\ &= f_\Delta(xy) \\ &\geq f_\Delta(x) \\ &= \sup(\Delta) \end{aligned}$$

ฉะนั้น $f(xy) \geq \sup(\Delta)$ และทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} \max\{f(xy), \inf(\Delta)\} &= f(xy) \\ &\geq \sup(\Delta) \\ &\geq \min\{f(x), f(y), \sup(\Delta)\} \end{aligned}$$

ถ้า $x \in S_{(f;\Delta)}$ จะได้ว่า $f_\Delta(x) = \max\{\min\{f(x), \sup(\Delta)\}, \inf(\Delta)\}$ และจะได้

$$\begin{aligned} \max\{f(xy), \inf(\Delta)\} &\geq \max\{\min\{f(xy), \sup(\Delta)\}, \inf(\Delta)\} \\ &= f_\Delta(xy) \\ &\geq f_\Delta(x) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \max\{\min\{f(x),\sup(\Delta)\},\inf(\Delta)\} \\
&\geq \min\{f(x),\sup(\Delta)\} \\
&\geq \min\{f(x),f(y),\sup(\Delta)\}
\end{aligned}
$$

กรณี 2 $\min\{f_\Delta(x),f_\Delta(y)\}=f_\Delta(y)$ เราสามารถพิสูจน์ในทำนองเดียวกัน ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\max\{f(xy),\inf(\Delta)\}\geq \min\{f(x),f(y),\sup(\Delta)\}$$

ดังนั้น f เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S

สรุปและอภิปรายผล

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้โครงสร้าง Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุปซึ่งเป็นนัยทั่วไปของ $(\in_\lambda,\in_\lambda\vee q_\mu)$-กึ่งกรุป-ย่อยวิภัชนัย และได้ลักษณะเฉพาะบางประการของ Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุป ดังนี้

1. ถ้า f เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S แล้ว f เป็น Ω-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S สำหรับทุกเซตย่อยไม่ว่าง Ω ของ Δ โดยที่ $S_{(f;\Omega)}\subseteq S_{(f;\Delta)}$
2. ถ้า f และ g เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S แล้ว $f\wedge g$ เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S
3. f_Δ เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S ก็ต่อเมื่อ f_Δ เป็นกึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S
4. ถ้า f_Δ เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S แล้ว f เป็น Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของ S

ข้อเสนอแนะ

เราสามารถใช้แนวคิดของ Δ-กึ่งกรุปย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุปเป็นแนวทางในการศึกษาและพัฒนาโครงสร้างใหม่ ๆ ของ Δ-ระบบย่อยวิภัชนัยของกึ่งกรุปและพีชคณิตอื่นๆ

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณมหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงครามอย่างสูง ที่ได้ให้การสนับสนุนงบประมาณทั้งหมดในการทำวิจัยครั้งนี้ และขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิที่กรุณาให้คำแนะนำอันมีค่า ซึ่งทำให้งานวิจัยนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

เอกสารอ้างอิง

Jun Y.B., and Song, S.Z. (2006). Generalized fuzzy interior ideals in semigroups. Information Sciences, 176, 3079–3093.

Kuroki, N. (1981). On fuzzy ideals and fuzzy bi-ideals in semigroups, Fuzzy Sets and Systems 5, 203-215.

Kuroki, N. (1982). Fuzzy semiprime ideals in semigroups. Fuzzy Sets and Systems, 8, 71-79.

Kuroki, N. (1991). On fuzzy semigroups. Information Sciences, 53, 203-236.

Kuroki, N. (1992). Fuzzy generalized bi-ideals in semigroups. Information Sciences, 66, 235-243.

Kuroki, N. (1993). On fuzzy semiprime quasi-ideals in semigroups. Information Sciences, 75, 201-211.

Mordeson, J.N., Malik, D.S., and Kuroki, N. (2003). *Fuzzy semigroups* (Vol. 131). Springer.

Rosenfeld, A. (1971). Fuzzy groups. Journal of mathematical analysis and applications, *35*(3), 512-517.

Shabir, M, and Ali, M. (2013). Characterizations of semigroups by the properties of their $\left(\in_{\gamma},\in_{\gamma}\vee q_{\delta}\right)$-
fuzzy ideals. Iranian Journal of Science andTechnology, 37A2, 117-131.

Shabir, M., Jun, Y.B., and Nawaz, Y. (2010). Characterizations of regular semigroups by (α,β)-fuzzy ideals, Computers and Mathematics with Applications, 59, 161-175.

Shabir, M., Jun, Y.B., and Nawaz, Y. (2010). Semigroups characterized by $\left(\in,\in\vee q_{k}\right)$-fuzzy ideals. Computers and Mathematics with Applications, 60, 1473-1493.

Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. Information and Control, 8(3), 338-353.